高等學校教學用書

射影幾何學

下册

H. Ф. 切特維魯新著





高等教育出版社

高等學校教學用書



射影幾何學

下册

H. Ф. 切特維魯新著
東北師範大學幾何教研室譯
楊春田 孫福元校

高等教育出版社

本書係根據蘇俄教育部教育出版社(Учпедгиз)出版的切特維魯新著(Н. Ф. Четверухин)"射影幾何學"(Проективная геометрия)1953年版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲師範學院教科書。

本書由東北師範大學數學系楊春田、孫福元、郭衡中、蔡昌齡、黃啟藻、王銘文、王家彥等譯出，由楊春田、孫福元校閱。

射 影 几 何 学

下 册

Н. Ф. 切特維魯新著

东北师范大学几何教研室譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇号

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四号)

京華印書局印刷 新華書店总經售

書号13010·79 開本 850×1168 1/32 印張 5 12/16 字數140,000

一九五五年十一月北京第一版

一九五六年六月北京第二次印刷

印數3,001—7,000 定價(8) ¥0.70

目　　錄

統一書号13010.79
定价¥0.70

第五章　二次圖形的射影变換
(同素变換与異素变換)

§ 47. 从調和出發的射影性定义以及它与斯丹納定义的等値性

1. 在前兩章裏，我們曾經根据斯丹納的射影性定义，作过關於點列与線束的射影对应理論的結構。这就是兩个一次圖形中若一个圖形上四个元素的交叉比總等於另一圖形上四个对应元素的交叉比，那麼我們把兩个一次圖形的这种一一对应關係叫做射影对应。利用交叉比(非調和比)这样來定义射影对应之所以可能，是因为交叉比是投射与截斷的不变量。这从點列与它的透視線束間对应元素交叉比相等的定理(§ 27)就可以得到。交叉比本身与線段和角的度量有關，而度量是射影幾何裏要避免的概念。因为射影幾何可以在它本身所固有的純幾何基礎上建立起來(不利用度量概念)。

在从特殊形式的空間——添加非固有元素的歐幾里得空間——發展起來的这本射影幾何教程裏，使用我們已有的交叉比的射影性定义是適当的，这可以使我們容易敍述平面射影幾何的基本事实。然而把一次圖形的任意四个元素交叉比不变的这样要求作为射影性定义却过於嚴刻，並且使射影幾何今後的發展要受到限制。以後將要說明，这种要求可以用調和元素羣的不变性这样較寬的要求來代替，也就是用交叉比等於 -1 的特殊情形的不变性來代替。同時应該注意，(四个)元素的調和擺列性質可以利

用完全四角形(§30)由純射影的方法來定义。斯陶特就是用这样方法根据調和的观念❶作出了射影幾何的純幾何(不用度量概念)結構。

在这本射影幾何教程中，我們並不打算來講射影幾何的純幾何結構。並且曾經說过，射影性定义是根据交叉比的概念。因此，我們不改变敍述的性質，仍利用从調和出發的射影性定义，以便使我們可能在放寬的斯陶特要求下來研究射影对应。为此我們必須証明这兩个射影性定义的等值性，这就是在这一節裏所要作的。

2. 於是，兩个一次圖形作成的一一对应，如果其中一个圖形的每四个調和元素，对应第二个圖形的四个調和元素，这样的对应就叫做斯陶特射影对应。

我們首先証明，当一个圖形的四个調和元素变为另一个圖形的四个調和元素時，只要單方面的保留調和性就够了。

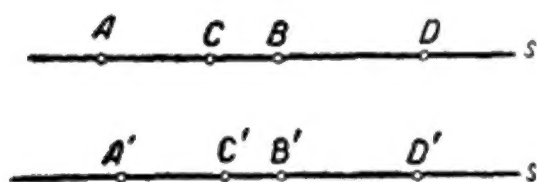


圖 175.

事实上，設有兩个點列 s 和 s'（圖 175）。假定，当點列 s 变为點列 s' 時調和性保持不变。我們來証明当逆变時，調和性也保持不变。

設有點列 s' 的四个調和點 A', B', C', D'。假定點 A', B', C' 对应點列 s 的點 A, B, C。

我們用 D 來表示點 A, B, C 的第四調和點。於是按照假定點列 s 的四个調和點 $ABCD$ 所对应點列 s' 的四个點也是調和的。但是點 A, B, C 对应點 A', B', C'。因此點 D 对应點 D' 並且點 D' 对应點 D，D 就是三點 A, B, C 的第四調和點❷。

3. 其次我們來証明下面的斯陶特射影对应的性質：

---

❶ 参考歷史簡述，340，341 頁。

❷ 不要忘記，我們假定这个对应是一对一的。

I. 斯陶特射影对应是有序的。

我們來研究两个點列 s 和 s'，並且假定它們間已經建立了斯陶特的射影对应。

为了断定这种对应的有序性，只需要証明點列 s 的點的順序關係对应點列 s' 裏对应點的同样順序關係。例如，需要証明，如果點列 s 的兩对點不互相分隔，則點列 s' 裏的对应點对也具有同样的性質。如果點列 s 的點对互相分隔，則點列 s' 裏的对应點对也具有相同的性質。

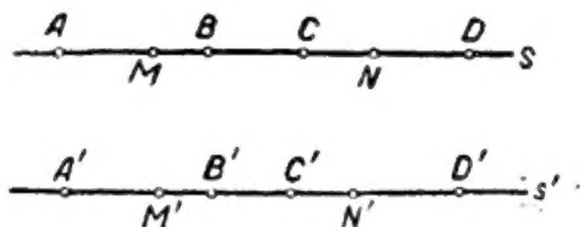


圖 176.

例如，設有點列 s 的四个點 A，B，C 和 D（圖 176），並且

$$A, B \doteq C, D.$$

我們來証明对於对应點 A'，B'，C' 和 D' 將有：

$$A', B' \doteq C', D'.$$

我們在 § 32 裏曾說过，兩个不分隔的點对總有公共的調和點对。我們用字母 M 和 N 來表示點列 s 的點对 A，B 和 C，D 的公共調和點对。因此就应有：

$$(ABMN) = -1, \quad (CDMN) = -1.$$

用 M' 和 N' 表示在點列 s' 裏，點 M 和 N 的对应點。於是按照斯陶特的射影性定义，应該有：

$$(A'B'M'N') = -1, \quad (C'D'M'N') = -1.$$

由此得到，點对 M'，N' 是點对 A'，B' 和 C'，D' 的公共調和點对。但这就是說

$$A', B' \doteq C', D'.$$

同样容易証明，在

$$A, B \div C, D$$

的情形下，也保持順序不变。

事实上，如果这時出現

$$A', B' \doteq C', D',$$

根据上面的証明，我們就应該有：

$$A, B \doteq C, D,$$

这与所作的假定相矛盾。

II. 斯陶特定理 如果在同一条直線上兩个點列成斯陶特射影对应，並且这兩个點列的三个对应點对重合，則所有的对应點对都重合，也就是已知的兩个點列是恆等的。

我們假定點列 s 和 s' 在一条直線上，並且对应點对 A, A'；B, B' 和 C, C' 重合(圖 177)。因为點列 s 和 s' 成斯陶特的射影对应，所以三个二重點 A, A'；B, B' 和 C, C' 的第四調和點也重合。因此，可以断定存在有重合的对应點对的無限（可數）集合。我們來証明不可能出現任何一个不重合的对应點对。为了这个目的，我

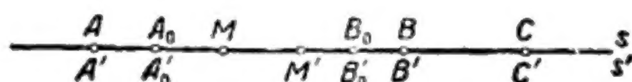


圖 177.

們來研究兩个 AB 線段裏不含有點 C 的線段。指定这个線段的某个點 M。它在第二个點列裏的对应點 M' 应該屬於同一个線段。这从下面的理由就可以推出。點列 s 和 s' 是同向的，因为方向 ABC（點列 s 的）对应方向 $A'B'C'$（點列 s' 的）。

因为 $MC \div AB$，

所以 $M'C' \div A'B'$

或 $M'C' \div AB$.

於是點 M' 在含有點 M 的線段 AB 上。假設 M' 不与 M 重合。我們來証明这会引出矛盾。

前面曾說明过，当點 M 沿直線移動時，點 M' 也向同一方向移

動。这兩个點到二重點 $A(A')$ 与二重點 $B(B')$ 处应該重合。我們可以假定重合產生的更早一些。用 $A_0(A_0')$ 來表示點对 M，M' 向一个方向移動時的第一个二重點，而用 $B_0(B_0')$ 來表示點对 M，M' 向相反方向移動時的第一个二重點。於是不含有點 C 的線段 A_0B_0，除端點 A_0 和 B_0 之外，不能有另外的二重點。另一方面，我們來研究对於點 $A_0(A_0')$ 和 $B_0(B_0')$ 而言与點对 C,C' 調和共軛的點对 C,D'。因为點对 A_0, A_0'；B_0, B_0' 和 C，C' 重合，所以點对 D,D'（是第四調和點）也重合。

此外应該有

$$A_0, B_0 \div C, D,$$

也就是二重點 $D(D')$ 屬於不含點 C 的線段 A_0B_0。

所得到的矛盾証明，假定存在相对应而不重合的點对 M 和 M' 是不正確的。因此不能有这样的點对。

4. 斯陶特的射影性定义与斯丹納射影性定义是等值的。

为了斷定这兩个射影性定义（斯陶特的和斯丹納的）的等值性，我們需要証明：

1）由兩个一次圖形的斯丹納射影性定义，可以得到它們的斯陶特的射影性。

2）由兩个一次圖形的斯陶特的射影性定义，可以得到它們的斯丹納的射影性。

这兩个說法的第一个是很明顯的，因为斯陶特的射影性定义只不过是对調和元素組的情况要求交叉比相等，而斯丹納的定义則假定兩个射影圖形的任何四对对应元素的交叉比都相等。顯然，斯丹納的定义超过了斯陶特定义的要求。

於是由斯丹納的射影性定义可以得到所研究的圖形的斯陶特射影性。

我們再來証明相反的說法也正確。

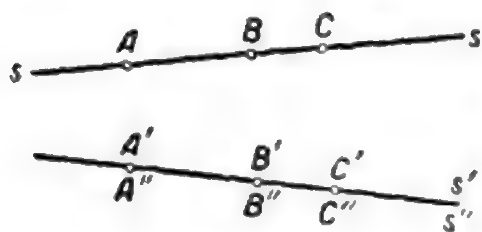


圖 178.

設有兩个點列 s 和 s'（圖 178）。假定在它們之間建立了斯陶特的射影对应。我們指定點列 s 的任意三个點 A, B 和 C，並且用 A', B', C' 表示它們在點列 s' 裏的对应點。於是就有：

點列 $s\,(A, B, C, \cdots)\,\barwedge$ 點列 $s'\,(A', B', C', \cdots)$（斯陶特对应）。

現在來建立點列 s 和 s'' 間的斯丹納射影对应，而點列 s'' 的底是點列 s' 所在的同一条直線。點列 s 和 s'' 間的（斯丹納）对应由三个对应點对 A，A''；B，B'' 和 C，C'' 來確定。这時取點列 s'' 的點 A'', B'' 和 C'' 使它們分別与點列 s' 的點 A', B' 和 C' 重合。

於是就該有：

點列 $s\,(A, B, C, \cdots)\,\barwedge$ 點列 $s''(A'', B'', C'', \cdots)$（斯丹納对应）。

在上面已經建立的點列 s 对应點列 s' 与 s'' 的兩种对应裏，我們把點列 s' 和 s'' 裏对应點列 s 裏同一个點的兩个點看作对应點。例如，如果點列 s 的點 K 对应點列 s' 的點 K'，也对应點列 s'' 的點 K''，則點 K' 和 K'' 看作點列 s' 和 s'' 的对应點。

不難断定，所建立的點列 s' 和 s'' 間的对应是斯陶特的射影对应。

事实上，設 K', L', M' 与 N' 是點列 s' 的四个調和點，它們对应點列 s 的四个調和點 K，L，M 和 N（因为點列 s 和 s' 成斯陶特的射影对应）。这時，四个調和點 K，L，M，N 对应點列 s'' 的四个調和點 K'', L'', M'', N''（因为點列 s 和 s'' 成斯丹納的射影对应）。

因此，點列 s' 的四个調和點 K', L', M', N' 对应點列 s'' 的四个調和點 K'', L'', M'', N''。

所以，點列 s' 与 s'' 成斯陶特的射影对应。因为在这兩个點列

裏有三个重合的點对，就是：

$$A' \equiv A'', \quad B' \equiv B'', \quad C' \equiv C'',$$

於是按斯陶特定理，这兩个點列是恆等的：

$$s'(A', B', C', \cdots) \equiv s''(A'', B'', C'', \cdots).$$

因此，按斯陶特定义，點列 s 和 s' 是射影點列，按斯丹納定义，點列 s 和 s' 也是射影點列。

这样，兩个射影性定义的等值性定理就証明了。

这使我們在以後研究圖形的射影性質時只要求調和的不变性。特別是对於場的射影变換的研究，我們使用斯陶特的定义。

§ 48. 場的同素对应（同素变換）。

在这一節裏我們要擴大射影对应的概念到二次圖形，也就是擴大到點与直線的場上。当然，我們可以把所得到的結論按照空間对偶原理轉換到和場对偶的二次圖形上，也就是直線与平面的把上。

下面所說的兩个場元素間的一一对应就叫做同素对应，或者簡称为同素。

а）一个場的每个點对应另一个場的一个點。

б）一个場的每条直線对应另一个場的一条直線。

в）一个場的接合元素对，对应另一个場的对应的接合元素对（也就是屬於一条直線的點对应屬於对应直線的點）。

应該注意，存在同素对应的兩个場的底可以是兩个不同的平面，或者是同一个平面。其次，从同素对应的定义可以得到这个概念的傳遞性。这就是說与第三个場 ω'' 成同素对应的兩个場 ω 与 ω' 必互相成同素对应。

我們來証明同素对应具有射影性質，也就是兩个同素对应場的对应一次圖形是射影形。假定場 ω 和 ω' 是同素对应的。我們

來研究場 ω 的一个點列 s 与它在場 ω' 上的对应點列 s'。証明點列 s 和 s' 是射影形。为此，我們知道，只要証明點列 s 的任意四个調和點对应點列 s' 的四个調和點就可以。設 A，B，C，D 是點列 s 裏構成調和羣的四个點。在平面 ω 上，通过點 A 任意引直線 AP 和 AQ，通过點 C 引截線与直線 AP 和 AQ 交於點 S 和 Q（圖 179）。其次，以直線联結點对 B，Q 和 B，S。我們用 P 來表示直

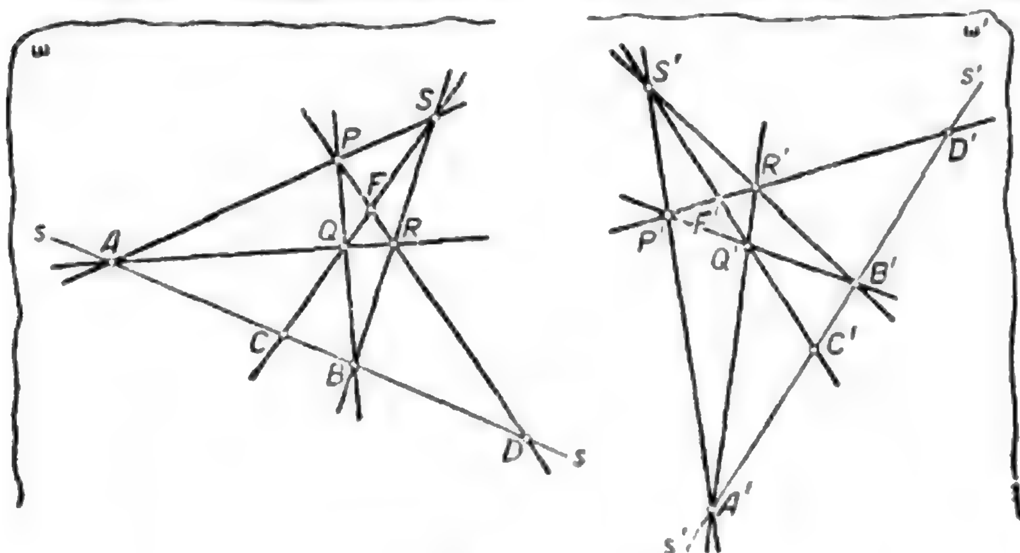


圖 179.

線 AS 和 BQ 的交點，用 R 來表示直線 BS 和 AQ 的交點。这時，直線 PR 与點列 s 交於點 D。这是由於點 A 和 B 是完全四角形 $PQRS$ 的对角線點，並且點 C 和 D 是通过第三个对角線點 F 的兩个对边和对角線 AB 的交點。我們知道，这時點对 A，B 和 C，D 应該構成調和羣。因此，对於四个調和點 A，B，C，D，我們作出完全四角形 $PQRS$，它的对角線是直線 s，A 和 B 是对角線點，而 C 和 D 是对角線与完全四角形的边 QS 和 PR 的交點。

點列 s 在平面 ω' 上对应點列 s'。點列 s 的點 A，B，C，D 对应點列 s' 的點 A'，B'，C'，D'，完全四角形 $PQRS$ 对应完全四角形 $P'Q'R'S'$。於是，从同素对应定义可以推出，所有的从屬關係应該从場 ω 移到場 ω' 上而沒有任何改变。因此在平面 ω' 上，直線 s'

就是完全四角形 $P'Q'R'S'$ 的对角線，A' 和 B' 是它的对角線點，而點 C' 和點 D' 是通过第三个对角線點 F' 的一对对边和对角線的交點。由此立刻推出，四个點 A', B', C', D' 構成調和組。於是，需要証明的事項已經証明。

現在就不难証明在兩个同素对应場裏对应線束的射影性。

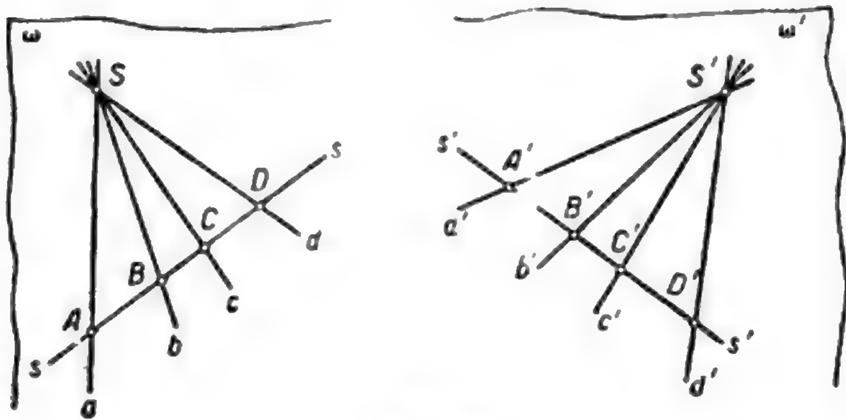


圖 180.

我們假定，場 ω 的線束 S 对应場 ω' 的線束 S'（圖 180）。用直線 s 截線束 S。我們得到与線束 S 透視的點列：

$$\text{點列}\ s(A, B, C, D, \cdots)\ \overline{\wedge}\ \text{線束}\ S(a, b, c, d, \cdots).$$

直線 s 在平面 ω' 上对应直線 s'。後者截線束 S' 於點 $A', B', C', D', \cdots$，並且

$$\text{點列}\ s'(A', B', C', D', \cdots)\ \overline{\wedge}\ \text{線束}\ S'(a', b', c', d', \cdots)。$$

另一方面，在場 ω 和 ω' 的同素对应裏的點列 s 和 s' 是射影的：

$$\text{點列}\ s(A, B, C, D, \cdots)\ \overline{\wedge}\ \text{點列}\ s'(A', B', C', D', \cdots)。$$

由此斷定这兩个點列的透視線束 S 和 S' 也是射影的：

$$\text{線束}\ S(a, b, c, d, \cdots)\ \overline{\wedge}\ \text{線束}\ S'(a', b', c', d', \cdots)。\ (\text{証完})$$

这样，兩个同素对应場裏对应一次圖形的射影性就得到証明。

由此也可以得到，同素对应場裏作为兩个射影線束对应射線

交點軌跡的每个二次曲線对应一个二次曲線（構成第一个曲線的兩个線束变为構成第二个曲線的兩个線束）。

§ 49. 透視同素变換与透射

設想在空間裏有平面 ω 和 ω' 以及射影中心 S（圖 181）。从中心 S 把平面 ω 的點投射到平面 ω' 上。这時平面 ω 的每个點 A 的中心射影是平面 ω' 的唯一點 A'。反过來，平面 ω' 的點 A' 对应它在平面 ω 上的中心射影 A。同样，場 ω 的每条直線的中心射影是場 ω' 裏的对应直線。例如，場 ω 的直線 AB 对应場 ω' 的直線 $A'B'$。这兩条对应直線是平面 ω 与平面 ω' 和投射平面 SAB（或 $SA'B'$）的交線。因此直線 $A'B'$ 对应平面 ω 上的直線 AB。因为在一条直線上的點的中心射影是对应直線上的點，於是兩个平面 ω 和 ω' 同素对应的所有条件都已具备。因此，推得的結論是平面 ω 和 ω' 間的对应是同素对应。这种对应叫做**透視同素对应**。

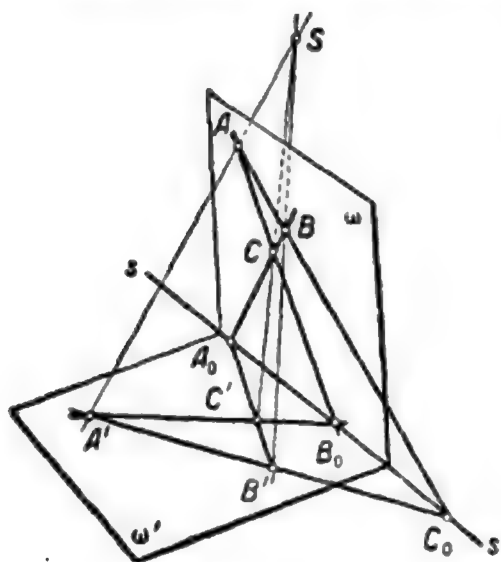


圖 181.

平面 ω 和 ω' 的交線 ss 顯然是透視同素对应的二重點的軌跡。我們用 C_0 來表示直線 AB 与直線 ss 的交點。这時點 C_0 自身对应。所以对应 AB 的直線 $A'B'$ 应該通过 C_0。由此斷定兩条对应直線相交在直線 ss 上，这条直線也叫做**透視同素对应的軸**。點 S 叫做这个**同素对应的中心**。

現在進行下面的作圖。从中心 S_1 把平面 ω 投射到平面 ω_1 上（圖 182）。於是平面 ω 和 ω_1 間就作成透視同素对应，其中三角形

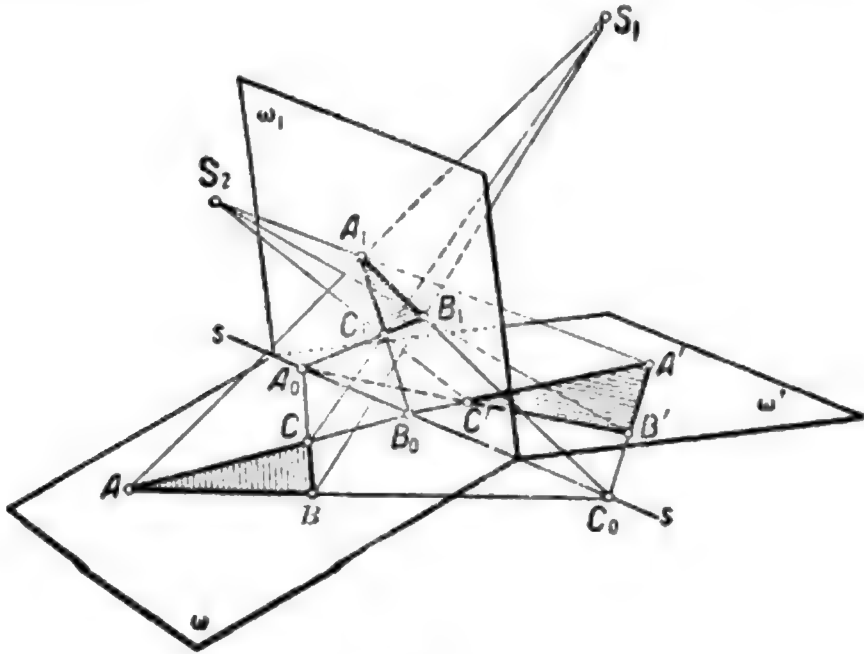


圖 182.

ABC 对应三角形 $A_1B_1C_1$。然後，再从与 S_1 不同的中心 S_2 把平面 ω_1 投射到通过平面 ω 和 ω_1 的交線的平面 ω' 上，我們得到使平面 ω_1 与 ω' 相对应的新的透視同素对应。在这个同素对应裏，三角形 $A_1B_1C_1$ 对应三角形 $A'B'C'$。平面 ω 和 ω' 間的对应顯然也是同素对应，因为与第三个場 ω_1 同素对应的兩个場 ω 和 ω' 互相同素对应。此外，場 ω 和 ω' 間的对应是**透視同素的**。这个結論是由於对应三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 是透射的，也就是它們滿足於笛沙格定理。因此直線 AA'，BB' 和 CC' 通过一个點。我們用 S 來表示这个點。那麼點 S 就是場 ω 和 ω' 的透視同素对应的中心。

如果平面 ω' 与平面 ω 重合，我們就得到一种新的情形。在这种情形下同素对应的場有同一个底。又因为在这种情形下对於三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 笛沙格定理仍然有效(平面上的笛沙格定理)，於是联結对应點对的直線通过重合平面的同一个點 S。在这种情形下的同素对应叫做**透射**，點 S 叫做**透射中心**。联結对应點对 $(A, A'; B, B'; C, C'; \cdots)$ 的所有直線都通过中心 S。直線 s 叫作

透射軸。透射对应直線对的交點($A_0, B_0, C_0, \cdots$)都在这条直線上。

通过透射中心 S 的所有直線都是二重直線。中心 S 顯然也是二重點。

同样,透射軸 s 是二重直線,它的所有點都是二重點。在透射裏的兩个对应三角形,例如三角形 ABC 和 $A'B'C'$,滿足笛沙格定理的条件。

反过來也一样,滿足笛沙格定理的兩个三角形可以看作是透射裏的对应三角形。由此,这样三角形也就叫做透射三角形。

如果平面上的同素对应有中心,那麼它也有軸,也就是是透射。事实上,在这种情形下对应三角形在透射的位置並且它們的对应边的三个交點在一条直線上,这条直線顯然也就是透射軸。

同样,具有軸的同素对应也具有中心,也就是是透射。

如果已知透射中心 S 与透射軸 s,那麼要確定这个透射,只要再給出一对对应點 A,A' 就可以。这時點对 A,A' 应該滿足唯一的条件:直線 A,A' 一定要通过點 S。在其他方面,对应點对的取法是随便的❶。

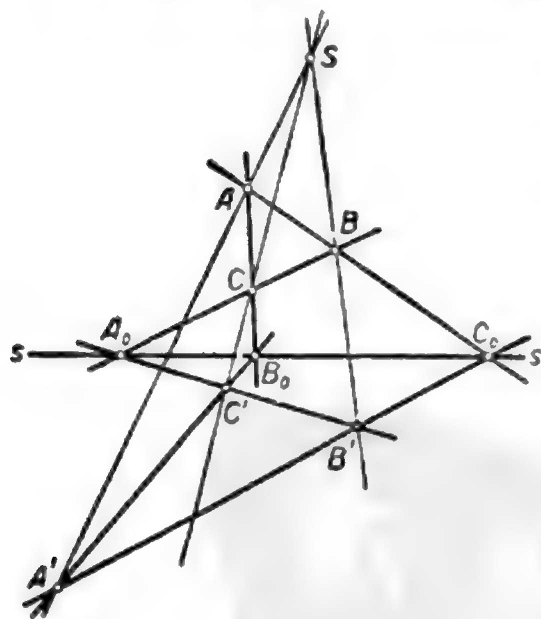


圖 183.

特別是,我們可以取透射軸 s 上的某个點作为透射中心 S。透射的这样特殊情形,在以後(§ 54)我們將要遇到。

我們來証明,如果已知

$$S, s \text{ 和 } (A, A'),$$

❶ 当然,不能假定點 A 是二重點(也就是 $A' \neq A$)。

則透射完全確定。

設已知任意點 B(圖 183)，它的对应點 B' 可利用下面的作圖方法找到。我們引直線 AB 並且用 C_0 來表示这条直線与透射軸 s 的交點。直線 $A'C_0$ 是直線 AC_0 的对应直線。點 B' 应該在这条直線 $A'C_0$ 上，也在射線 SB 上。因此有：

$$B'=A'C_0\times SB.$$

用这种方法，对於平面上的每个點都可以作出它的对应點。

如果，利用某个另外对应點对(与點对 A, A' 不同的)作點 B 的对应點 B'，例如利用點对 C, C'，我們得到的點与头一种作法得到的點相同。这从三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 滿足笛沙格定理就可以直接推得。事实上，直線 CB 和 $C'B'$ 应該相交於透射軸 s 上的一个點 A_0。所以它們是对应直線。

用已知的一对对应直線来代替对应點对，也可以確定透射。例如，除透射中心 S 与透射軸 s 以外，已知一对对应直線 $AB, A'B'$。顯然，这兩条直線只需要滿足一个要求：它們的交點 C_0 应該属於透射軸 s。这時，引線束 S 的任意射線（例如 SA），它在直線 AB 和 $A'B'$ 上就確定对应點对 A, A'。

应該注意，透射總可以看作是兩平面重合的透視同素对应。这样的同素对应是我們把圖沿透射軸 s 矯正後所得到的。这時，这个軸变为同素对应平面的交線。透視同素对应的中心可以作为直線 $AA', BB', CC', \cdots$ 的交點來確定。按笛沙格定理(空間的)这些直線应該通过一个點 S。

§ 50. 仿射同素对应

在第一章裏我們曾研究过仿射对应和透視仿射对应。这兩种对应都滿足同素对应定义裏所提出的那些要求。因此仿射对应是屬於同素对应的。但是同時它还具有特殊的性質（例如平行与直

線上三个點的簡單比等不变性)，而这些性質並不是所有一般的同素对应的共同性質。在这一節裏我們要確立仿射同素对应的概念，確定使它由所有同素对应裏劃分出來的特徵性質。

假定在平面 ω 和 ω' 間建立了仿射对应。这時平面 ω 的兩条平行直線 f 和 g ($f \parallel g$) 对应平面 ω' 的平行直線 f' 和 g'($f' \parallel g'$)(圖 184)。在射影平面上，平行直線相交於非固有點。我們用 F_∞ 來表示直線 f 和 g 的非固有交點，它对应平面 ω' 上用 F'_∞ 所表示的直線 f' 和 g' 的非固有交點。因为點 F_∞ 是平面 ω 的任意非固有點，因而可以説在仿射同素对应裏，一个平面的非固有點總对应另一个平面的非固有點。这就是説平面 ω 的非固有直線在仿射同素对应裏对应平面 ω' 的非固有直線。

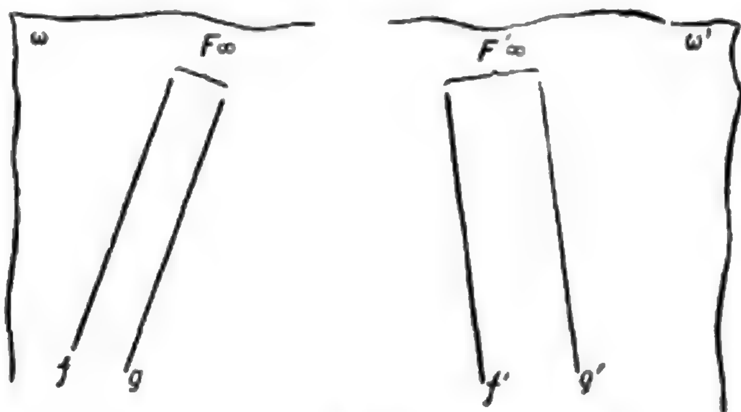


圖 184.

我們來証明这种性質是仿射同素对应的特徵。它的必要性从平行的不变性已經推出。为了証明它的充分性，我們來研究在一直線上三个點的簡單比。

設平面 ω 和 ω' 成同素对应，並且平面 ω 的非固有直線对应平面 ω' 的非固有直線。我們來研究一对对应直線 s 和 s' (圖 185)。假定直線 s 的三个點 A, B 和 C 对应直線 s' 的三个點 A', B' 和 C'。此外，由於所作的假定，直線 s 的非固有點 D_∞ 对应直線 s' 的非固有點 D'_∞。因为同素对应不改变在一直線上四个點的交叉比，我

們应該有 $(ABCD_\infty)=(A'B'C'D'_\infty)$.

但是,在 § 25 裏証明过:

$$(ABCD_\infty)=(ABC),\quad (A'B'C'D'_\infty)=(A'B'C').$$

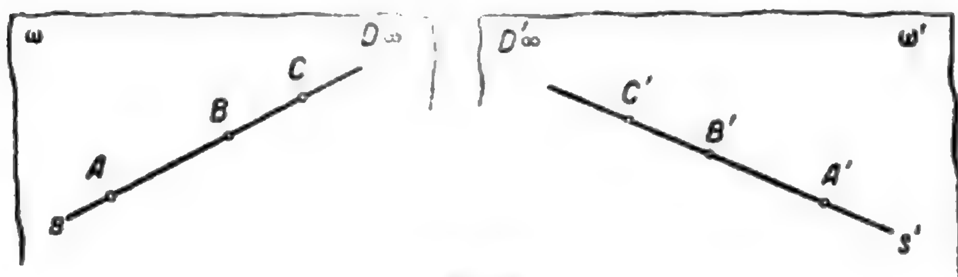


圖 185.

於是我們得到:

$$(ABC)=(A'B'C').$$

因此，在一个平面的非固有直線对应另一个平面的非固有直線的同素对应裏，在一条直線上三个點的簡單比保持不变。然而这就是說上述的同素对应是仿射的。

根据總結出來的理由,我們得到下面的結論:

在第一章裏研究过的兩个平面(不同的或者合同的)的仿射对应是一种同素对应，其中一个平面的非固有直線对应另一个平面的非固有直線(仿射同素对应)。

假定點列 s 在仿射同素对应裏对应點列 s'。我們知道在任何同素对应裏點列 s 和 s' 總是射影的。在已知情形下，它們还具有附加的性質:这兩个點列的三对对应點的簡單比相等。

用 AB 和 CD 表示直線 s 的某兩个線段,而用 $A'B'$ 和 $C'D'$ 表示直線 s' 的对应線段(圖 186)。於是就应有:

$$(ACB)=(A'C'B');\quad (BDC)=(B'D'C'),$$

或者:

$$\frac{AB}{CB}=\frac{A'B'}{C'B'};\quad \frac{BC}{DC}=\frac{B'C'}{D'C'}.$$

交換內項,得到:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{CB}{C'B'};\quad \frac{BC}{B'C'}=\frac{DC}{D'C'}.$$

比較这兩个等式，就發現：

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{CD}{C'D'}=\text{常數。}$$

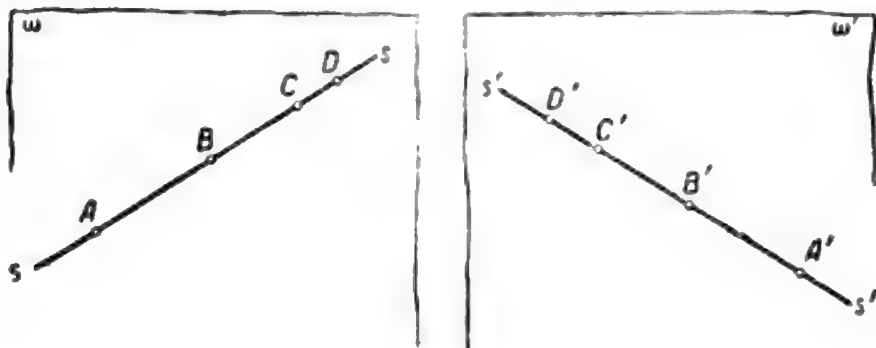


圖 186.

因此，點列 s 和 s' 的任意兩个对应線段的比是常數。具有这些性質的射影點列叫做**相似點列**。像我們所看到的，兩个射影點列相似的条件是它們非固有點的对应。特別在仿射同素对应裏的兩个对应點列總具有这种性質

§ 51. 仿射的透射

假定，場 ω 和 ω' 重合。於是这兩个場的同素对应就是同一平面上元素的对应。如果这种同素对应是仿射的，那麼，平面的非固有直線应該自身对应。所以非固有直線是同素对应的二重直線。

現在我們來研究仿射的透射，这是以非固有直線为二重直線的透射。

我們知道（§ 49），透射的二重直線通过透射中心，除此以外的二重直線就是透射軸。

在仿射的透射裏，平面的非固有直線是二重直線，因此它或是通过透射中心 S_∞，在这种情形下 S_∞ 是非固有點，或是它本身就是透射軸 s_∞。我們來研究这种透射的可能情形。

1）**透視仿射对应** 在这种情形下，透射中心 S_∞ 是非固有

點。联結对应點对的所有直線都平行而且通过點 S_{∞}（圖 187）。顯然，这种透射就是透視仿射变換，它的軸 s 是二重點的軌跡（透射軸）。

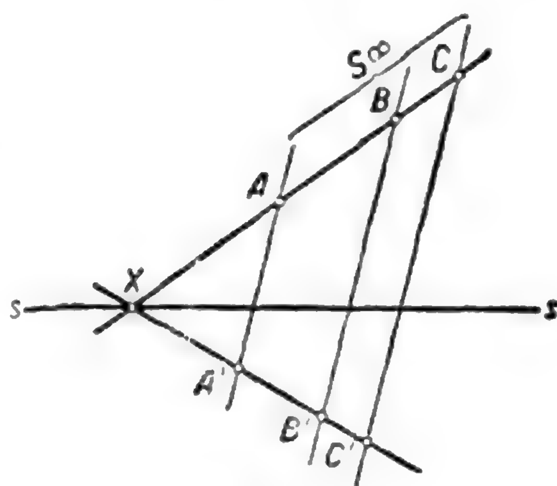


圖 187.

在特殊情形下，如果透視仿射对应的中心 S_{∞} 是軸 s 的非固有點，那麼联結对应點对的所有直線都平行於軸 s（圖 188）。这种变換叫做**滑動**。

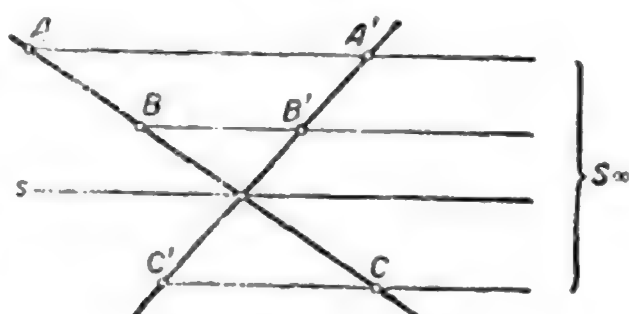


圖 188.

2）**位似** 如果透射軸 S_{∞} 是非固有直線，則对应直線对，必是平行的且相交於非固有軸上的點。例如在圖 189 裏，对应直線 AB 和 $A'B'$ 平行且相交於非固有點 X_{∞}。这時就有：

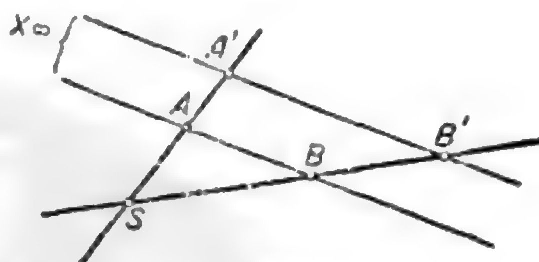


圖 189.

$$\frac{SA'}{SA}=\frac{SB'}{SB}=k\text{（常數）}$$

因此，所研究的同素对应就是具有係數 k 的位似（§ 3）。

位似的特殊情形是**对合位似**或**中心对称**（圖 190）。在这种情形下，对应點对 A 和 A' 在直線 AA' 上構成对合，它的二重點是中心 S 与非固有點 A_{∞}（在透射軸上）。对於通过中心 S 的任意直線

是同样的。因为在这样的每条直線上的对合是双曲的，並且其中的一个二重點是非固有點，所以第二个二重點 S 是非固有點的調和共軛點，它平分線段 AA'（或 BB'）。由此可見所研究的对合位似是中心对称（有中心 S）。

3）**平行移動**　最後假定我們有这样仿射的透射，它的軸 s_∞ 是非固有直線，而中心 S_∞ 是非固有點。因此，中心 S_∞ 在軸 s_∞[1] 上。

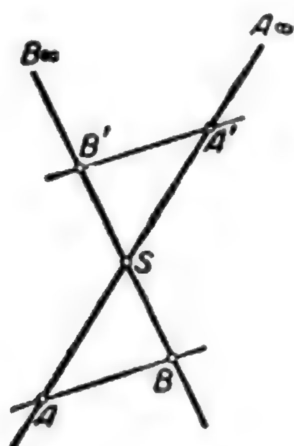


圖 190.

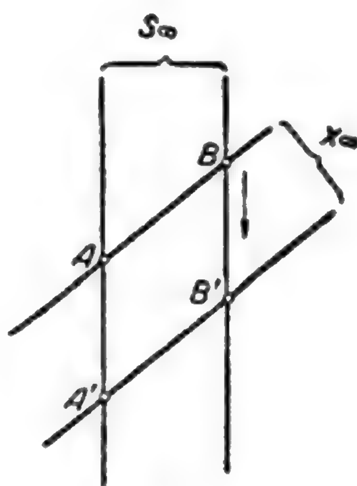


圖 191.

如果 A,A' 和 B,B' 是兩对对应點（圖 191），則直線 AA' 和 BB' 平行並相交於點 S_∞：

$$AA' \times BB' = S_\infty.$$

另一方面，直線 AB 和 $A'B'$ 是对应的，它們应該相交於非固有的透射軸 s_∞ 上的一點 X_∞。

因此　　$$AB \parallel A'B'.$$

所以，圖形 $ABA'B'$ 是平行四边形，並且就有

$$AB \# A'B'.$$

於是，適合所研究情形的透射就是向量 $\overrightarrow{AA'}$ 所確定的**平行移**

---

[1] "滑動"也是中心 S 与軸 s 相結合的透射。

動。

平行移動是平面的这样变换，它的所有點在確定的方向上移動同样的距离。移動的向量 $\overrightarrow{AA'}$ 既確定移動的方向，又確定移動的距离。

§ 52. 確定同素变换的条件

1. 我們提出關於幾个条件可以確定同素变换的問題。預先証明下面兩个定理：

定理 I. 存在有同素变换使平面上任意选取的非变态❶四角形变为与已知任意四角形合同的四角形。

設平面 ω 上有四角形 $ABCD$。我們來証明必存在这样的同素变换，它使已知四角形 $ABCD$ 变为与已知任意的第二个四角形 $A'B'C'D'$ 合同的四角形(圖 192)。

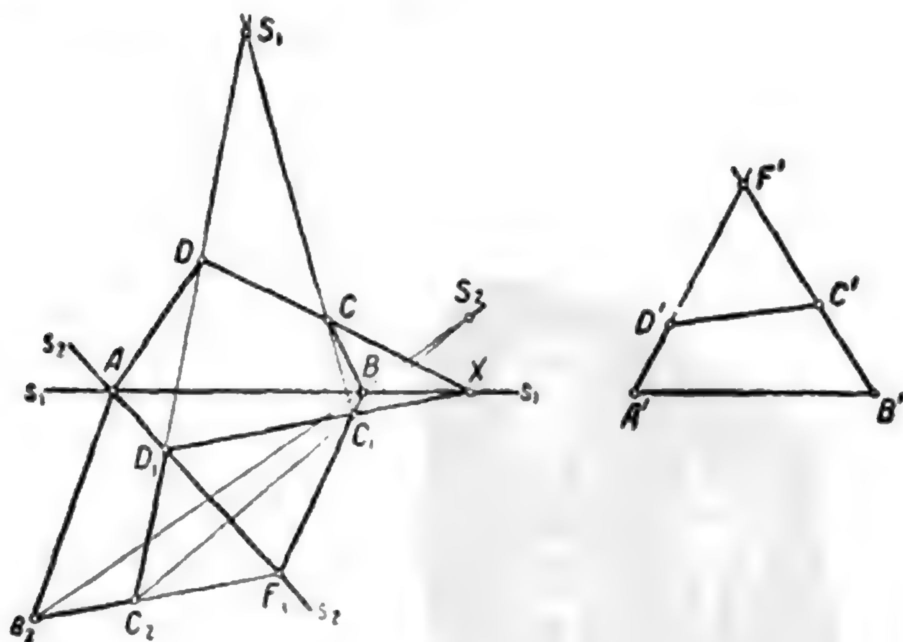


圖 192.

通过已知四角形的頂點 A 作任意直線 s_2，並且在它的上面截

❶ 就是任何三个頂點都不在一条直線上的四角形。

取線段 $AD_1=A'D'$。再求第二个四角形的边 $A'D'$ 和 $B'C'$ 的交點 F'，在直線 s_2 上截取線段 $D_1F_1=D'F'$。用 X 表示已知四角形的边 DC 与对边 AB 的交點：

$$X=AB\times DC.$$

联結點 D_1 和點 X，點 F_1 和 B。用 C_1 表示直線 D_1X 和 F_1B 的交點：

$$C_1=D_1X\times F_1B.$$

我們得到四角形 ABC_1D_1 在有軸 AB 与中心 S_1 的透射裏，这个四角形可以看作是和已知四角形 $ABCD$ 对应。中心 S_1 作为直線 D_1D 和 C_1C 的交點來確定：

$$S_1=C_1C\times D_1D.$$

实际上，有中心 S_1 与軸 $s_1\equiv AB$ 的透射把四角形 $ABCD$ 变为四角形 ABC_1D_1。用字母 H_1 表示这个透射，透射 H_1 变換平面 ω 上的點使四角形 $ABCD$ 变为四角形 ABC_1D_1。

因为線段 $AD_1=A'D'$，於是在这个線段 AD_1 上可以作四角形 $AD_1C_2B_2$ 与第二个已知四角形 $A'D'C'B'$ 合同：

$$AD_1C_2B_2=A'D'C'B'.$$

这時由於 $D_1F_1=D'F'$，四角形的边 B_2C_2 与边 AD_1 交於點 F_1。

不難看出，四角形 $AD_1C_2B_2$ 在具有軸 $s_2\equiv AD_1$ 与中心 S_2 的透射裏是四角形 AD_1C_1B 所对应的圖形，而 S_2 是按下面的方法決定：

$$S_2=B_2B\times C_2C_1.$$

用字母 H_2 表示这个透射。透射 H_2 变換平面上的點使四角形 AD_1C_1B 变为四角形 $AD_1C_2B_2$。

現在來研究作为透射 H_1 和 H_2 積的变換 K：

$$\mathrm{K}=\mathrm{H}_1\cdot\mathrm{H}_2.$$

不難看出，变換 K 是同素变換。事实上，經过透射 H_1 和 H_2 時平面 ω 的點变为同一平面上的对应點。平面 ω 的直線变为对应直

線。最後接合的元素变为接合的元素。

因此，存在有同素变换 K，它把已知四角形 $ABCD$ 变为与第二个已知四角形 $A'B'C'D'$ 合同的四角形 $AB_2C_2D_1$。

定理已經証明❶。

定理 II. 只存在一个同素变换，它使已知非变态的四角形 $ABCD$ 对应第二个已知的四角形 $A'B'C'D'$。

假定，在某个同素变换裏，四角形 $ABCD$ 对应四角形 $A'B'C'D'$ (圖 193)。这時，並沒有說我們所研究的同素变换是兩个不同平面的或是一个平面的(也就是同素对应場的底是兩个不同的平面或是同一个平面)。

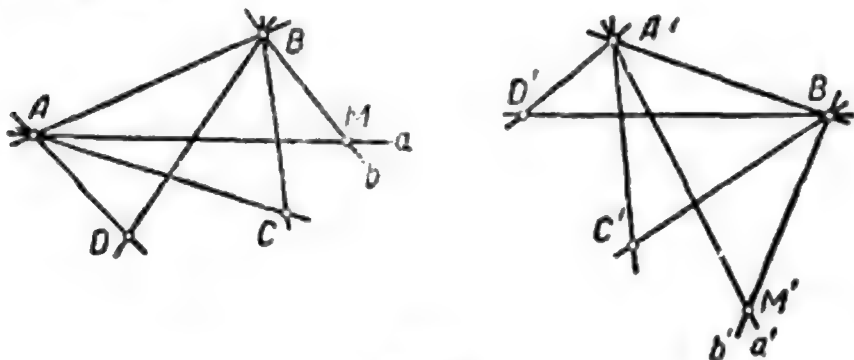


圖 193.

我們來証明場 ω 的每个點 M 对应場 ω' 的完全確定的唯一點 M'。

我們研究以对应點 A 和 A' 作中心的兩个線束。在这兩个線束裏有对应射線对

$$AB \text{ 和 } A'B', \quad AC \text{ 和 } A'C', \quad AD \text{ 和 } A'D'。$$

它們可以完全確定線束 A 和 A' 間的射影对应：

$$\text{線束 } A(AB, AC, AD, \cdots) \barwedge \text{線束 } A'(A'B', A'C', A'D', \cdots)。$$

❶ 可以証明，利用一連串的中心射影能建立平面 ω 和 ω' 的同素变换，它使已知四角形 $ABCD$ 对应已知四角形 $A'B'C'D'$ (例如，参考 Гиршвальд 著射影幾何学，1935 年版)。

这時，線束 A 裏通过點 M 的射線 a 对应線束 A' 裏通过对应點 M' 的確定射線 a'。於是应該有

$$(AB, AC, AD, a) = (A'B', A'C', A'D', a').$$

从这个条件，我們知道（§ 28）射線 a' 唯一確定並且可以進行作圖。

用類似的方法，再研究有中心 B 和 B' 的兩个射影線束：

線束 $B(BA, BC, BD, \cdots) \barwedge$ 線束 $B'(B'A', B'C', B'D', \cdots)$。

在線束 B 裏通过點 M 的射線 b 对应線束 B' 裏通过 M' 的確定射線 b'。並且

$$(BA, BC, BD, b) = (B'A', B'C', B'D', b'),$$

这使我們可以唯一地作出射線 b'。

因此，作为直線 a' 和 b' 交點的點 M' 唯一地確定。

$$M' = a' \times b'.$$

所以，只存在一个同素变换，它使四角形 $ABCD$ 对应四角形 $A'B'C'D'$（証完）。

2. 从定理 I 和定理 II 我們可以断定：已知的兩个对应的非变态四角形，或者四个对应點对（其中任三个都不在一条直線上），完全確定兩个場的同素对应。

事实上，如果場 ω 的點 A, B, C, D 对应場 ω' 的點 A', B', C', D'，那末，根据定理 I 就存在一种同素变換，把四角 $ABCD$ 变为与四角形 $A'B'C'D'$ 合同的四角形 $A_1B_1C_1D_1$。

用 ω_1 表示場 ω 此時所变成的場。疊置場 ω_1 和 ω' 的底，使四角形 $A_1B_1C_1D_1$ 与四角形 $A'B'C'D'$ 重合。於是在場 ω 和 $\omega_1 \equiv \omega'$ 的同素变換裏，四角形 $ABCD$ 对应四角形 $A'B'C'D'$。按定理 II，这种同素变換是唯一的。

因此，已知的場 ω 和 ω' 的兩个对应四角形確定兩个場的唯一同素变換（証完）。

確定同素变换也可以用兩个对应四边形或者四个对应直線对(其中任何三条不通过一个點)来代替兩个对应四角形。

事实上，如果已知兩个对应四边形，我們也就有了同素对应場的四个对应點对(已知四边形的頂點)，我們曾經証明过，它們可以確定一个同素变换

已知三个对应點对与一个对应直線对也可以確定一个同素变換。譬如，已知三个对应點对 A, A'; B, B', 和 C, C'(圖 194)和一个对应直線对 g 和 g'，則注意直線 g 和 g' 分别与三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 的交點，我們又得到二个对应點对。於是可以选取兩个对应的非变态四角形，例如 $BCMN$ 和 $B'C'M'N'$，它們就完全確定一个同素变換。

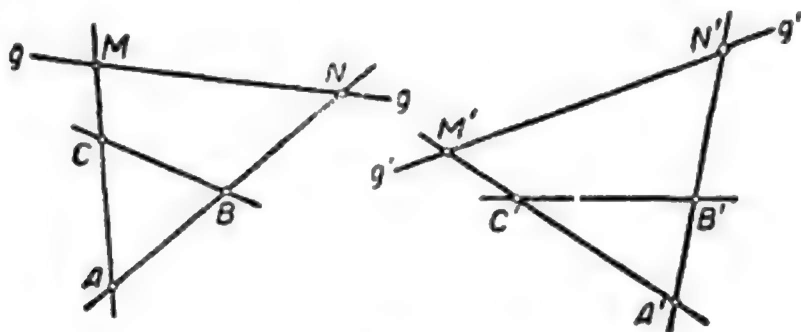


圖 194.

在第一章裏我們研究过仿射对应，它是由兩个对应三角形(三个对应點对)確定的。現在很明顯，仿射同素变換的第四个条件乃是場的非固有直線的对应。因此为了確定仿射同素变換，祇要已知三个对应點对就够用。

§ 53. 射影座标

1. 在研究平面的仿射变換時，我們曾經得到仿射座标的概念，仿射座标乃是普通笛卡兒座标(§ 8)的推廣。使平面上普通笛卡兒座标系經过仿射变換我們就得到仿射座标系。这時新座标

系——仿射座标系——对於每个仿射变換是不变的。

为了研究平面的射影变換(同素变換)我們应該找出推廣的笛卡兒座标系,它能对於場的任意同素变換保持不变。

这样的座标系命名为射影座标系。普通笛卡兒座标系施行射影变換後，我們就可以得到这种座标系。

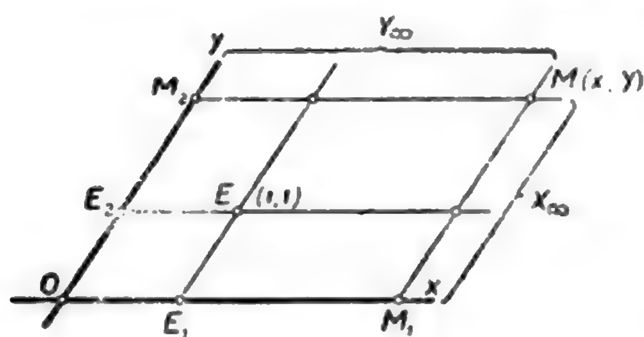


圖 195.

像在§8裏一样，設平面上有普通的笛卡兒座标系 xOy (圖 195)。我們用 $E(1,1)$ 來表示單位點並用 $M(x,y)$ 來表示平面的任意點。

現在我們進行場的同素变換，並且看一看圖 195 这時所变成的形狀。在这个圖裏，直線 M_2M 和 E_2E 与軸 Ox 交於它的非固有點 $X_\infty(M_2M \| E_2E \| Ox)$。完全同样，直線 M_1M 和 E_1E 与軸 Oy 也交於它的非固有點 $Y_\infty(M_1M \| E_1E \| Oy)$。

假定在同素变換裏，點 X_∞ 和 Y_∞ 对应點 X' 和 Y'，而非固有直線 $X_\infty Y_\infty$ 对应直線 $X'Y'$ (圖 196)。於是，直線 $M_2'M'$ 和 $E_2'E'$ 应該与軸 $O'x'$ 交於點 X'，而直線 $M_1'M'$ 和 $E_1'E'$ 应該与軸 $O'y'$ 交於點 Y'。因此，圖 196 是圖 195 的射影映像。現在我們給笛卡兒座标 x 和 y 以那样的表示式，使它們对於所有的同素变換都保持不变。这利用交叉比來表示座标 x 和 y

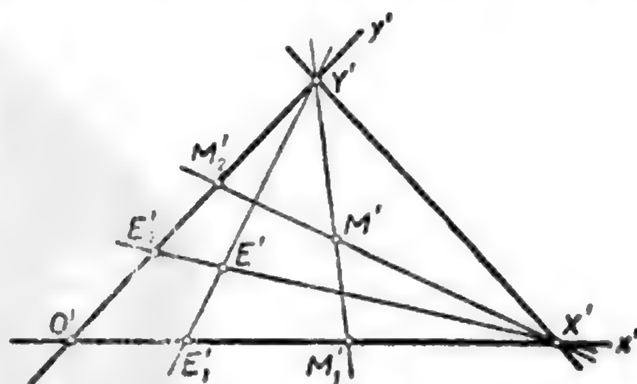


圖 196.

就可以作到：

$$x=\frac{OM_1}{OE_1}=(M_1E_1O)=(M_1E_1OX_\infty),$$

因为　$$(M_1E_1OX_\infty)=\frac{(M_1E_1O)}{(M_1E_1X_\infty)}=(M_1E_1O).$$

同样：

$$y=\frac{OM_2}{OE_2}=(M_2E_2O)=(M_2E_2OY_\infty).$$

这样，我們就用射影的形式表示了笛卡兒座标。

变換後（圖 196）我們就有：

$$x'=(M_1'E_1'O'X'),$$
$$y'=(M_2'E_2'O'Y'). \tag{1}$$

这些表示式叫做點 M' 的**射影座标**。

因为在同素变换裏，一直線上四个點的交叉比不变，所以就有

$$x'=x \text{ 和 } y'=y.$$

2. 現在我們不依据笛卡兒座标系，独立地研究射影座标系。首先我們看到，要按公式（1）來定义射影座标，应該給出三角形 $O'X'Y'$，我們把它叫做**基本**（基礎）**三角形**或者**座标三角形**。此外，应該給出單位點 E'。

从公式（1）可知当流動點 M' 与點 E' 重合時，我們得到：

$$x'=1,\ y'=1.$$

所以單位點 E' 的射影座标等於 1。

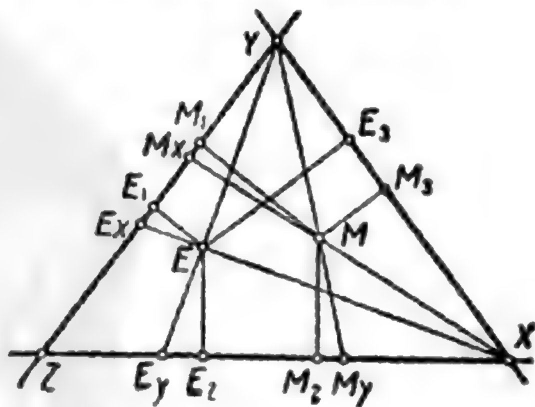


圖 197.

觀察圖 196 我們看到，座标圖形（基本三角形与單位點）对於三角形頂點与边的關係是完全同等的，因此，可以取基本三角形的任意兩个頂點作为射影中心，並且从它們把單位點与已知點投射到三角

形的对边上。假定我們已知射影座标系的基本(座标)三角形 XYZ(圖 197)。从顶 X 把點 E 和 M 投射到座标三角形的对边上，我們得到點 E_x 和 M_x。从顶點 Y 把这兩个點也投到对边上我們得到點 E_y 和 M_y。於是射影座标 x' 和 y' 可以用下面的公式來表示:

$$x'=(M_yE_yZX), \quad y'=(M_xE_xZY). \tag{2}$$

应該指出，直線 XY 上點的射影座标仍然是不確定的。事实上，如果點 M 在直線 XY 上，則 M_y 和 X 重合，而 M_x 和 Y 重合。欲除掉这种例外，我們轉到**齐次射影座标**上，令

$$x'=\frac{x}{z}, \quad y'=\frac{y}{z}.$$

我們看齐次射影座标 x, y, z 具有甚麼样的幾何意义。

从點 M 和 E 到座标三角形的边上作垂線，用字母 M_1, M_2, M_3 和 E_1, E_2, E_3 分别表示这些垂線的垂足(圖 197)。於是有:

$$\frac{x}{z}=x'=(M_yE_yZX)=(YM_y, YE_y, YZ, YX)=\frac{(YM_y, YE_y, YZ)}{(YM_y, YE_y, YX)}=$$

$$=\frac{\sin(M_yYZ)}{\sin(E_yYZ)}:\frac{\sin(M_yYX)}{\sin(E_yYX)}=\frac{\sin(M_yYZ)}{\sin(M_yYX)}:\frac{\sin(E_yYZ)}{\sin(E_yYX)}=$$

$$=\frac{MM_1}{MM_3}:\frac{EE_1}{EE_3}=\frac{MM_1}{EE_1}:\frac{MM_3}{EE_3},$$

或:

$$\frac{x}{z}=\frac{MM_1}{EE_1}:\frac{MM_3}{EE_3}.$$

用類似的方法我們得到:

$$\frac{y}{z}=\frac{MM_2}{EE_2}:\frac{MM_3}{EE_3}.$$

點 M 到座标三角形各边的距离，我們表示成下面的样子:

$$MM_1=d_1, \quad MM_2=d_2, \quad MM_3=d_3.$$

並且單位點 E 到各边的距离表以

$$EE_1=e_1, \quad EE_2=e_2, \quad EE_3=e_3.$$

於是，得到下面的公式：

$$x:y:z=\frac{d_1}{e_1}:\frac{d_2}{e_2}:\frac{d_3}{e_3}. \tag{3}$$

公式(3)表明，點M的齐次射影座标 x, y, z 与已知點及單位點到座标三角形各边距离的比成比例。

3．齐次射影座标的这种性質使我們可以寫出座标变換的公式。

用 ξ, η 表示平面上的普通笛卡兒座标。假定在这个笛卡兒座标系裏基本三角形 XYZ 各边的方程式具下面形狀❶：

$$\begin{array}{l} (YZ)\cdots\alpha_1\xi+\beta_1\eta+\gamma_1=0, \\ (ZX)\cdots\alpha_2\xi+\beta_2\eta+\gamma_2=0, \\ (XY)\cdots\alpha_3\xi+\beta_3\eta+\gamma_3=0. \end{array} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1\beta_1\gamma_1 \\ \alpha_2\beta_2\gamma_2 \\ \alpha_3\beta_3\gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{4}$$

为了寫法簡單，假定这些方程式的左边是用法線式表示的。这時距离 d_1, d_2 和 d_3 可以用方程式(4)的左边來表示，其中 ξ 和 η 是點M的笛卡兒座标。因此就有：

$$x:y:z=\frac{\alpha_1\xi+\beta_1\eta+\gamma_1}{e_1}:\frac{\alpha_2\xi+\beta_2\eta+\gamma_2}{e_2}:\frac{\alpha_3\xi+\beta_3\eta+\gamma_3}{e_3}.$$

在齐次笛卡兒座标裏$\left(\text{用}\ \frac{\xi}{\zeta}\ \text{和}\ \frac{\eta}{\zeta}\ \text{代替}\ \xi\ \text{和}\ \eta\right)$这些公式可以寫成下面的形狀：

$$x:y:z=(a_1\xi+b_1\eta+c_1\zeta):(a_2\xi+b_2\eta+c_2\zeta):(a_3\xi+b_3\eta+c_3\zeta)$$

或者

$$\begin{array}{l} \rho x=a_1\xi+b_1\eta+c_1\zeta, \\ \rho y=a_2\xi+b_2\eta+c_2\zeta, \\ \rho z=a_3\xi+b_3\eta+c_3\zeta. \end{array} \quad \begin{vmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5}$$

在公式(5)裏，ρ 是不等於零的任意因數。方程組(5)的行列式

---

❶ 方程組(4)的行列式不能等於零，因为在等於零的情况下，三条直線通过一个點。

不能等於零，因为它与方程組(4)的行列式只差一个常數因數。

公式(5)給出用齐次笛卡兒座标 ξ,η,ζ 表示齐次射影座标 x, y,z 的式子。我們看到，这些公式是線性的。就 ξ, η 和 ζ 來解这些方程式，則得：

$$\begin{aligned} \rho'\xi &= a_1'x+b_1'y+c_1'z, \\ \rho'\eta &= a_2'x+b_2'y+c_2'z, \\ \rho'\zeta &= a_3'x+b_3'y+c_3'z, \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} a_1'b_1'c_1' \\ a_2'b_2'c_2' \\ a_3'b_3'c_3' \end{vmatrix} \neq 0. \tag{6}$$

公式(6)就是用點 M 的齐次射影座标表示了它的齐次笛卡兒座标。

利用这些公式可以得到从一个射影座标系变到另一个射影座标系的公式。假定在所研究的射影座标系 x,y,z 以外，还有由座标三角形 $\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$ 与單位點 $\overline{E}$ 決定的第二个座标系 $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$。按公式(6)，用點 M 在第二个座标系裏的齐次射影座标來表示它的齐次笛卡兒座标，我們得到：

$$\begin{aligned} \bar{\rho}'\xi &= \bar{a}_1'\bar{x}+\bar{b}_1'\bar{y}+\bar{c}_1'\bar{z}, \\ \bar{\rho}'\eta &= \bar{a}_2'\bar{x}+\bar{b}_2'\bar{y}+\bar{c}_2'\bar{z}, \\ \bar{\rho}'\zeta &= \bar{a}_3'\bar{x}+\bar{b}_3'\bar{y}+\bar{c}_3'\bar{z}, \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} \bar{a}_1'\bar{b}_1'\bar{c}_1' \\ \bar{a}_2'\bar{b}_2'\bar{c}_2' \\ \bar{a}_3'\bar{b}_3'\bar{c}_3' \end{vmatrix} \neq 0. \tag{7}$$

如果把用 $\bar{x},\bar{y}$ 和 $\bar{z}$ 表示 ξ,η 和 ζ 的式子代入公式(5)，則得到所求的**齐次射影座标的变換公式**。它們可以寫成下面的形狀：

$$\left.\begin{aligned} \rho x &= A_1\bar{x}+B_1\bar{y}+C_1\bar{z}, \\ \rho y &= A_2\bar{x}+B_2\bar{y}+C_2\bar{z}, \\ \rho z &= A_3\bar{x}+B_3\bar{y}+C_3\bar{z}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

这時行列式

$$\begin{vmatrix} A_1B_1C_1 \\ A_2B_2C_2 \\ A_3B_3C_3 \end{vmatrix}$$

不等於零，因为它等於公式(5)和(7)的对应行列式的積。

从公式(3)可以求得基本三角形 XYZ 頂點的座标。事实上，对

於頂點 X，应有 $d_2=d_3=0$，所以我們得到座标：

$$X(x:0:0)\ \text{或}\ X(1:0:0).$$

同样，对於頂點 Y 和 Z，可以得到：

$$Y(0:1:0),\quad Z(0:0:1).$$

利用射影座标的变換公式(8)來求新基本三角形的頂點在舊座标系裏的座标。为此对點 $\overline{X}, \overline{Y}$ 和 $\overline{Z}$ 逐次地应用公式(3)，这些點在新座标系裏有座标：$\overline{X}(1:0:0)$，$\overline{Y}(0:1:0)$，$\overline{Z}(0:0:1)$。

对於點 $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$，在舊座标系裏我們得到下面的座标：

$$\overline{X}(A_1:A_2:A_3),\quad \overline{Y}(B_1:B_2:B_3),\quad \overline{Z}(C_1:C_2:C_3).$$

这就是公式(8)裏係數的幾何意义。如果基本三角形的頂點 X 和 Y 保持不動($X=\overline{X}$；$Y=\overline{Y}$)，我們看一看射影座标的变換公式(8)变成甚麼形狀。

因为頂點 X 和 Y 用舊座标系的座标是 $X(1:0:0)$，$Y(0:1:0)$，所以应該有

$$A_1:A_2:A_3=1:0:0;\quad B_1:B_2:B_3=0:1:0.$$

由此得到：$$A_2=A_3=0\ \text{和}\ B_1=B_3=0.$$

因此，在所研究的情形下，座标的变換公式(8)变成下面的形狀：

$$\begin{aligned}\rho x&=A_1\bar{x}+C_1\bar{z},\\ \rho y&=B_2\bar{y}+C_2\bar{z},\\ \rho z&=C_3\bar{z}.\end{aligned}\qquad (A_1\cdot B_2\cdot C_3\neq 0)\qquad (8')$$

§ 54. 用射影座标与笛卡兒座标所表示的同素变換

我們在 § 52 裏証明过，場 ω 到場 ω' 的同素变換可以由这兩个場的已知四对对应點完全確定。

假定，在平面 ω 上建立有由座标三角形 XYZ 与單位點 E 所確定的射影座标系。

在平面 ω' 上建立有由座标三角形 $\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$ 与單位點 $\overline{E}$ 所確定的

射影座标系。

假定場 ω 和 ω' 成同素对应，其中場 ω 內四个點 X, Y, Z 和 E 所对应的場 ω' 的四个點，这四个點，我們用 X', Y', Z' 和 E' 來表示（圖 198）。这样，已知的同素对应 K 被四个对应點对 X, X'; Y, Y'; Z, Z'; EE' 確定。

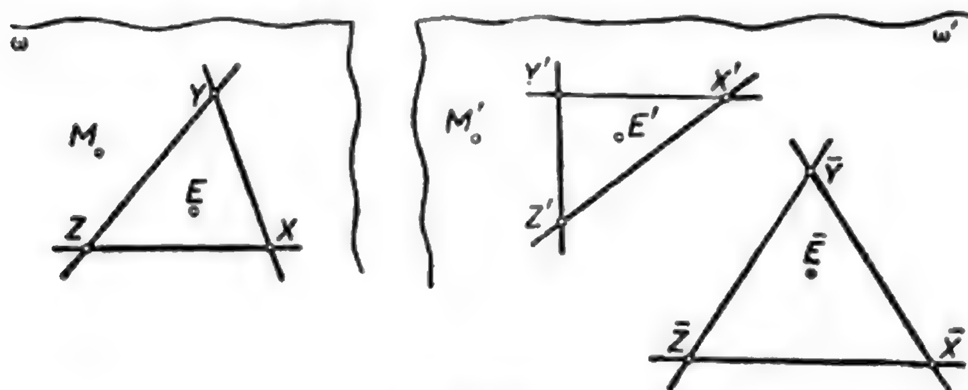


圖 198.

設 M 是平面 ω 的任意一點，而 M' 是它在平面 ω' 上的对应點。我們的目的是要求用已知點 M 的座标 x, y, z 來表示变換後的點 M' 的齐次射影座标 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$。为了这个目的，我們研究在平面 ω' 上由座标三角形 $X'Y'Z'$ 和單位點 E' 所確定的齐次射影座标系。用 x', y', z' 表示點 M' 在这个座标系裏的座标.

因为同素变換不破坏一次圖形的四对对应元素的交叉比，所以點 M 關於座标系 (XYZ, E) 的射影座标与點 M' 關於座标系 (X', Y', Z', E') 的射影座标应該相等:

$$\frac{x}{z}=\frac{x'}{z'};\quad \frac{y}{z}=\frac{y'}{z'}.$$

因此，对於齐次射影座标可以寫成:

$$x:y:z=x':y':z',$$

或者:

$$\rho^* x'=x,\quad \rho^* y'=y,\quad \rho^* z'=z. \tag{1}$$

另一方面，应用前節裏射影座标的变換公式到座标系 $(X'Y'Z'$,

E')和($XYZ,\overline{E}$)上,就可以寫出:

$$\left.\begin{aligned}\rho\bar{x}&=A_1x'+B_1y'+C_1z',\\\rho\bar{y}&=A_2x'+B_2y'+C_2z',\\\rho\bar{z}&=A_3x'+B_3y'+C_3z'.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

將公式(1)所表示的座标 x', y', z' 代入上面的公式裏，我們得到:

$$\left.\begin{aligned}\bar{\rho}\bar{x}&=A_1x+B_1y+C_1z,\\\bar{\rho}\bar{y}&=A_2x+B_2y+C_2z,\\\bar{\rho}\bar{z}&=A_3x+B_3y+C_3z.\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

这裏: $$\bar{\rho}=\rho\rho^*.$$

所得到的結果可以敍述成下面的形狀:

場的同素变換可以用齐次射影座标的線性公式(3)來表示。

不难断定,逆命題也是正確的:

線性公式(3)所表示的变換是同素变換。

首先研究含齐次射影座标的直線方程式是甚麼形狀。

含齐次笛卡兒座标的直線方程式形狀是:

$$m\xi+n\eta+p\zeta=0.$$

按前節的公式(6),从笛卡兒座标 ξ,η 和 ζ 变成齐次射影座标,我們得到:

$$m\xi+n\eta+p\zeta\equiv\frac{m}{\rho'}(a_1'x+b_1'y+c_1'z)+$$

$$+\frac{n}{\rho'}(a_2'x+b_2'y+c_2'z)+\frac{p}{\rho'}(a_3'x+b_3'y+c_3'z)\equiv$$

$$\equiv Mx+Ny+Pz=0.$$

因此,直線可以用齐次射影座标的一次方程式來表示:

$$Mx+Ny+Pz=0.$$

我們來証明,按照公式(3)的線性变換,直線变为直線,也就是同素变換。

因为線性变換(3)的行列式 Δ 不等於零，所以公式(3)可以就 x, y 和 z 來解。

我們得到形狀類似的線性公式：

$$\begin{aligned}\rho_1 x &= \overline{A}_1\bar{x}+\overline{B}_1\bar{y}+\overline{C}_1\bar{z},\\ \rho_1 y &= \overline{A}_2\bar{x}+\overline{B}_2\bar{y}+\overline{C}_2\bar{z},\\ \rho_1 z &= \overline{A}_3\bar{x}+\overline{B}_3\bar{y}+\overline{C}_3\bar{z},\end{aligned}\quad \begin{vmatrix}\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{C}_1\\ \overline{A}_2\overline{B}_2\overline{C}_2\\ \overline{A}_3\overline{B}_3\overline{C}_3\end{vmatrix}\neq 0. \tag{4}$$

假定在平面 ω 上有直線

$$Mx+Ny+Pz=0.$$

按公式(4)变換这个方程式，又得到關於座标 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 的線性方程式：

$$\overline{M}\bar{x}+\overline{N}\bar{y}+\overline{P}\bar{z}=0.$$

因此，所研究的線性变換是同素变換(証完)。

我們來看一看，場的同素变換用笛卡兒座标什麼样的公式表示。

作为普通笛卡兒座标的射影推廣，我們曾經得到射影座标的概念。完全同样，齐次射影座标也是齐次笛卡兒座标的推廣。齐次笛卡兒座标可以看作是射影座标的特殊情形，这時座标軸 OX_∞ 和 OY_∞ 与非固有直線 $X_\infty Y_\infty$ 構成座标三角形(圖 195)。

由此可以断定，如果把座标 x, y, z 和 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 理解为點 M 与它的对应點 M' 的齐次笛卡兒座标，則用齐次射影座标表示同素变換的公式(3)和(4)仍然有效。

从公式(3)可以求得有下面形狀的座标的比：

$$\frac{\bar{x}}{\bar{z}}=\frac{A_1x+B_1y+C_1z}{A_3x+B_3y+C_3z},$$

$$\frac{\bar{y}}{\bar{z}}=\frac{A_2x+B_2y+C_2z}{A_3x+B_3y+C_3z}.$$

要从齐次笛卡兒座标变为普通的笛卡兒座标，应該在这些公

式裏令 $\bar{z}=z=1$。

於是得到：

$$
\left.\begin{aligned}
\bar{x}&=\frac{A_1x+B_1y+C_1}{A_3x+B_3y+C_3},\\
\bar{y}&=\frac{A_2x+B_2y+C_2}{A_3x+B_3y+C_3}.
\end{aligned}\right\} \tag{5}
$$

公式(5)是用笛卡兒座标表示同素变換。从这些公式看出：<u>場的同素变換可以用笛卡兒座标的分數線性函數來表示</u>。

应該指出，为了確定同素变換(5)，需要知道公式(5)右边的九个係數。然而，因为这些係數（不等於零的）裏的任何一个可使等於1，所以只存在係數的八个比，它們就可以確定变換公式(5)。

如果在平面上已知四对对应點［$M_1(x_1, y_1)$，$M_2(x_2, y_2)$，$M_3(x_3, y_3)$，$M_4(x_4, y_4)$，与它們的对应點 $M'_1(x'_1, y'_1)$，$M'_2(x'_2, y'_2)$，$M'_3(x'_3, y'_3)$，$M'_4(x'_4, y'_4)$］[1]，則把已知點的座标代入公式(5)時，我們得到八个方程式，从它們就可以求出未知的变換係數的比。

这样，我們用解析方法得到了早已証明过的命題：<u>四对对应點決定一个同素变換</u>（§ 52）。

§ 55. 同素变換的二重元素

1. 我們來研究在一个平面上的兩个場 ω 和 ω' 的同素变換。这裏產生这样的問題：已知的同素变換是否存在二重元素，也就是与它的对应點或直線相重合的點或直線。

假定，同素变換把場 ω 上任意选取的線束 S 变为場 ω' 的線束 S'（圖 199）。那麼線束 S 和 S' 是同素对应裏的对应線束，因而是射影線束。線束 S 和 S' 的对应射線交點作成一个二次曲線。我們用字母 k 來表示这个二次曲線。

---

[1] 並且每對的四個點中任何三个點都不在一条直線上。

我們知道（§36），兩个線束的公共射線 SS' 对应在點 S' 切於曲線 k 的射線（圖199 中的直線 $S'S''$）。

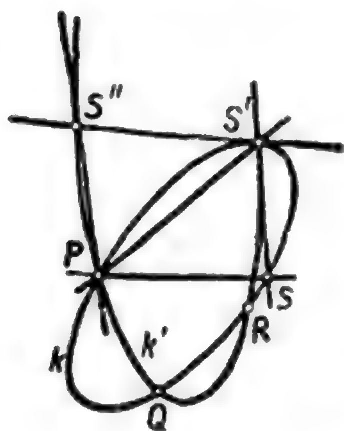


圖 199.

現在我們把線束 S' 看作是第一个場 ω 的線束，則同素变換把它变为場 ω' 的一个对应線束 S''。

線束 S' 和 S'' 在同素对应下是对应線束，因而应該是射影的。这兩个線束对应射線的交點構成通过點 S' 和 S'' 的一个二次曲線 k'。因为直線 SS' 对应在點 S' 切於曲線 k 的直線 $S''S'$，由是我們断定點 S'' 在这条切線上。另一方面，射線 $S''S'$ 对应射線 $S'S$。因此 $S'S$ 应該在點 S' 切於曲線 k'。

因为二次曲線 k 和 k' 都通过點 S'，所以 S' 是它們的交點。此外，它們可能还有三个交點[1]。用字母 P, Q 和 R 表示这些交點。我們來証明交點 P, Q 和 R 中的每一个都是同素变換的二重點。

我們对於这些點中的一个，例如點 P，進行討論。點 P 可以看作是射線 SP（線束 S 的）和 $S'P$（線束 S' 的）的交點。同素变換把射線 SP 变为射線 $S'P$，把射線 $S'P$ 变为 $S''P$。因此可以說，射線 SP 和 $S'P$ 的交點 P 对应它們的对应射線 $S'P$ 和 $S''P$ 的交點。但是後面这兩条射線也交於點 P，所以點 P 是自身对应。

於是可以有**三个二重點**。

有三个以上的二重點，例如有四个二重點，其中任何三个不在一条直線上，顯然是不可能的，因为在这种情形下（根據 §52 的定

---

[1] 兩个二次曲線 k 和 k' 至多有四个交點，因为如果它們有五个交點，則它們应該重合（五个點確定唯一的二次曲線）。另一方面，很容易举出有四个交點的兩个不同的二次曲線的例子。在二次曲線 k 上任意指定四个點，並且不在曲線 k 上，也不在所指定的四个點中任意兩个所在的直線上，另外再取第五个點，这五个點就可以確定曲線 k'。

理)同素变换的場 ω 和 ω' 看是恆等的，而在我們的討論裏，事前不这样假設。

2. 上面的論証的对偶論証(也就是以对偶原理为根据的)能使我們断定在場 ω 和 ω' 的同素对应裏，不可能有多於三条的二重直線。这些直線顯然是三角形 PQR 的边。

应該指出，在前面所有的論証裏，我們假定同素变换裏的对应線束(或點列)是射影的，而不是透視的。如果再假定已知的同素变换把每个線束 S 变为它的透視線束 S'，則不难断定这种同素变换是透射。

事实上，为此只要証明已知的同素变换有中心(或軸)就够了。假定 A 和 A' 是对应點对。在这种情形下，按假定，对应線束 (A) 和 (A') 是透視的，所以它們的公共射線 AA' 自身对应，也就是直線 AA' 是二重直線。这样联結对应點对的所有直線都是二重直線。如果它們都通过同一个點，則同素变换有中心而所要求的已經証明。因此我們假定，有三条二重直線 AA', BB' 和 CC' 不通过一个點。於是，这三条直線構成三角形 PQR，它的頂點(作为二重直線的交點)是二重點(圖 200)。如果这个三角形的任何一个边上有二重點，則(根据斯陶特定理)它的所有點都是二重點，也就是所研究的边是同素变换的軸。假定直線 DD' 是与三角形 PQR 的边不同的二重直線。在这种情形下，直線 DD' 至少与三角形 PQR 的一个边相交於不与这个三角形頂點重合的一个點 T。有三个二重點 Q, R, T 的相当边 CC' 就是同素变换的軸。

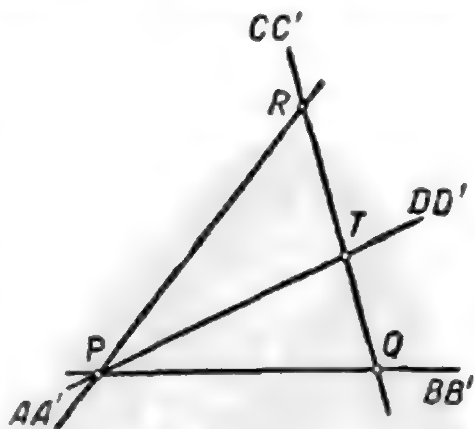


圖 200.

因此，所研究的同素变换是透射。在 § 49 裏曾經說明过，在透

射的情形下，对应場有全是二重點的直線——透射軸，它是二重直線，此外还有全是二重直線的線束，它的中心是透射中心。透射中心是对应的二重點。

在其他的情形下，我們看到同素变换不可能有多於三个的二重點和多於三条的二重直線。

假定 P 是同素变换的一个二重點。我們來証明也存在一条二重直線，它与點 P 按一定方式關联着。

我們研究以二重點 P 为中心的線束(圖 201)。設同素变换把射線 a 变为射線 a'，射線 b 变为 b'。我們取这样的射線 a 和 b 令它們不和自己的对应射線重合。如果線束 P 的所有射線都是二重的，則已知的同素变换是透射，並且它的中心 P 对应透射軸 p。因此回到我們的圖上。在对应直線 a 和 a' 上，同素变换確定兩个对应的射影點列。因为兩个點列的公共點 P 自身对应，所以这兩个點列是透視的。直線 A_1A_1' 和 A_2A_2' 確定透視中心 A。

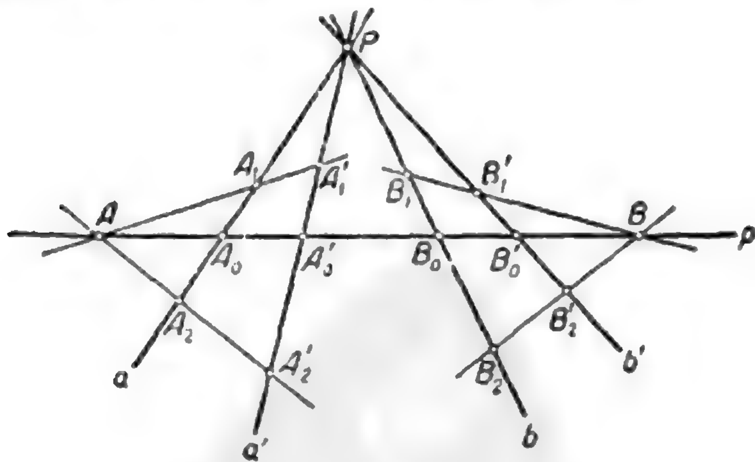


圖 201.

同样直線 B_1B_1' 和 B_2B_2' 確定點列 b 和 b' 的透視中心 B。

$$A = A_1A_1' \times A_2A_2',\quad B = B_1B_1' \times B_2B_2'.$$

我們來証明直線 $AB \equiv p$ 是对应的二重直線。用字母 A_0, A_0' 和 B_0, B_0' 分別表示直線 AB 与射線 a, a' 和 b, b' 的交點。因为點 A_0

和 B_0 对应點 A_0' 和 B_0'，所以直線 A_0B_0 对应直線 $A_0'B_0'$。因此这条直線是二重直線。这样就証明了每个二重點 P 和某条二重直線 $p\equiv AB$ 相關联。在線束 P 的对应射線上的透視點列的透視中心 $(A, B, \cdots)$ 在二重直線 p 上。

點 P 与直線 p 叫做**同素变換的關联二重元素对**。

3. 現在用座标來研究二重元素的問題。§ 54 的公式(3)表示出在已知同素变換裏點 $M(x, y, z)$ 的对应點 M' 的齐次射影座标 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$。在研究同一个平面上場的同素对应時，我們可以假定兩个座标系是重合的。

如果點 M 是二重的，則它与它自身的对应點 M' 重合。在这种情形下，如果假定

$$\bar{x}=x,\ \bar{y}=y,\ \bar{z}=z,$$

則等式(3)应該成立。

於是有：

$$\bar{\rho}x=A_1x+B_1y+C_1z,$$
$$\bar{\rho}y=A_2x+B_2y+C_2z,$$
$$\bar{\rho}z=A_3x+B_3y+C_3z,$$

或：

$$\left.\begin{aligned}(A_1-\bar{\rho})x+B_1y+C_1z=0,\\ A_2x+(B_2-\bar{\rho})y+C_2z=0,\\ A_3x+B_3y+(C_3-\bar{\rho})z=0.\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

因此，可以用方程組(1)來確定二重點的座标。

这些方程式联立的条件是等式

$$\begin{vmatrix}A_1-\bar{\rho} & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2-\bar{\rho} & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3-\bar{\rho}\end{vmatrix}=0,\quad(2)$$

它是一个關於 $\bar{\rho}$ 的三次方程式，因而有三个根，其中可能有相同的或者虛的。

把方程組(2)的每个实根代入方程組(1)(代替 $\bar{\rho}$)，方程組(1)

变为联立的方程組，从它就可以確定二重點所对应的座标❶。

4. 这样我們就得到下面的結論：

1°. 在同素变换裏(不是透射)至多有三个二重點。

2°. 任何同素变换至少有一个二重點，它与方程式(2)的实根相当。

3°. 每个二重點和一条二重直線相關联。

4°. 如果同素对应有三个二重點 P, Q, R，則它也有三条二重直線：三角形 PQR 的边。三角形 PQR 叫做同素变换的不動三角形。

§ 56. 場的異素对应(異素变换)

所謂兩个場的異素对应是它們元素間的这样一种一一对应，其中：

a) 一个場的每个點对应另一个場的一条直線，

б) 一个場的每条直線对应另一个場的一个點，

в) 一个場的一对接合元素对应另一个場的一对接合对应元素。

应該注意，異素对应場可以具有不同的底或者同一个底。从異素对应的定义就可以推出与第三个場成異素对应的兩个場必彼此成同素对应。

我們來証明，異素对应具有射影的性質，也就是要証明兩个異素对应場的对应一次圖形是射影的。

假定場 ω 和 ω' 成異素对应(圖 202)。我們來研究場 ω 的點列 s 与它在場 ω' 裏所对应的線束 S'，証明線束 S' 为點列 s 的射影形。为了这一點，只要斷定點列 s 的每四个調和點对应線束 S'

---

❶ 哥拉沃列夫的射影幾何 175—182 頁有三次方程式(2)与線性方程組(1)的詳細討論。

的四条調和射線就够了。假定在直線 s 上有四个調和點 A, B, C, D。於是，類似§48所作的那样，可以作完全四角形 $KLMN$，使直線 s 是它的对角線，點 A 和 B 是它的对角線點，點 C 和 D 是对角線 s 与通过第三个对角線點 F 的一对对边的交點。

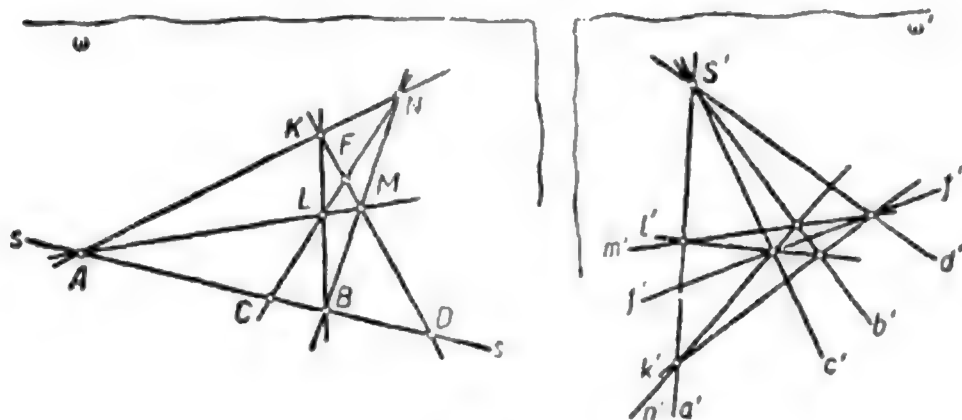


圖 202.

按照異素对应直線 s 在平面 ω' 上对应點 S'，而直線 s 的四个點 A, B, C, D 对应線束 S' 的四条射線 a', b', c', d'。完全四角形 $KLMN$ 对应完全四边形 $k'l'm'n'$，並且对应元素的相互从属關係应該保持。这就是說點 S' 是完全四边形 $k'l'm'n'$ 的对角線點，而直線 a' 和 b' 是它的对角線。直線 c' 和 d' 是对角線點 S' 与第三条对角線 f' 上的一对对頂點的連線。我們知道，这样的四条射線 (a',b',c',d') 構成調和束(§36)。因此，所要求的已被証明。

同样容易断定，異素对应把具有中心 S 的線束变为与它射影的點列 s'。事实上，如果線束 S 与任意直線 s 相交，則在直線 s 上可以得到透視點列。在異素对应裏，透視的線束 S 与點列 s 对应透視的點列 s' 与線束 S'。但是我們已經証明过，點列 s 为線束 S' 的射影形，由此断定線束 S 也是點列 s' 的射影形。

現在轉到確定異素对应的条件的問題上。我們来証明下面的命題：

如果已知兩个場間異素对应的四对对应元素（一个場的四个點与另一个場的四条对应直線），則〔利用一根直尺[1]〕对於任意一个已知的元素，可以作出它的对应元素。

假定場 ω 的四个點 A, B, C, D 对应場 ω' 的四条直線 a', b', c', d'（圖 203）。設已知場 ω 的任意一點 M。我們來証明在異素对应裏它对应場 ω' 的一条確定直線 m'。

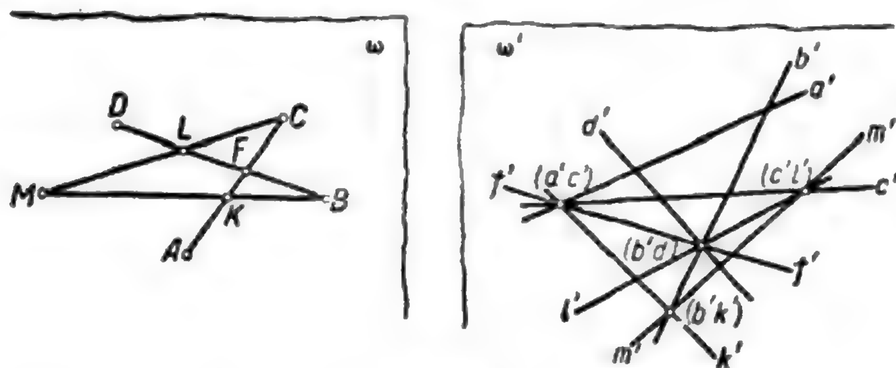


圖 203.

引直線 AC 和 BD，标出它們的交點 F。从點 M 与已知點 B 和 C 联直線，並且标出直線 BM 和 CA 以及直線 CM 和 BD 的交點：

$$BM \times CA = K, \quad CM \times BD = L.$$

點 M 当作直線 BK 和 CL 的交點：

$$BK \times CL = M.$$

轉到平面 ω' 的对应圖形上，我們有四条直線 a', b', c', d'。标出直線 AC 和 BD 所对应的交點 $(a'c')$ 和 $(b'd')$。通过點 $(a'c')$ 和 $(b'd')$ 作點 F 所对应的直線 f'。对於線束 $(a'c')$ 的三条射線 a', c', f' 作第四条射線 k'，使

$$(a'c'f'k') = (ACFK).$$

完全同样，对於線束 $(b'd')$ 的三条射線 b', d', f' 作第四条射線 l'，使

$$(b'd'f'l') = (BDFL).$$

---

[1] 也就是作直線。

於是點$(b'k')$和$(c'l')$，在平面 ω 和 ω' 間的異素对应裏，对应直線 BK 和 CL。

因此，通过點$(b'k')$和$(c'l')$的直線 m' 对应直線 BK 和 CL 的交點 M。

用類似的方法可以証明对於場 ω 的任意直線 p，可以作出它在場 ω' 裏的对应點 P'。

这样的作圖，用一根直尺就可以完全实現。

再轉到个別的異素对应的研究上，我們祇詳細談其中的一种，就是所謂場的配極对应。

这一章的以後幾節將討論这种对应以及它的性質。

§ 57. 極點与極線

1. 假定在平面上已知二次曲線 k 与任意點 P（圖 204）。过點 P 引兩条任意的割線 AB 和 CD。对於曲線 k 的內接四角形 $ACBD$，应用巴斯加定理，我們得到四个點应該在巴斯加線 p 上：对边的兩个交點（Q 和 R）与在相对頂點的切線的兩个交點（M 和 N）。

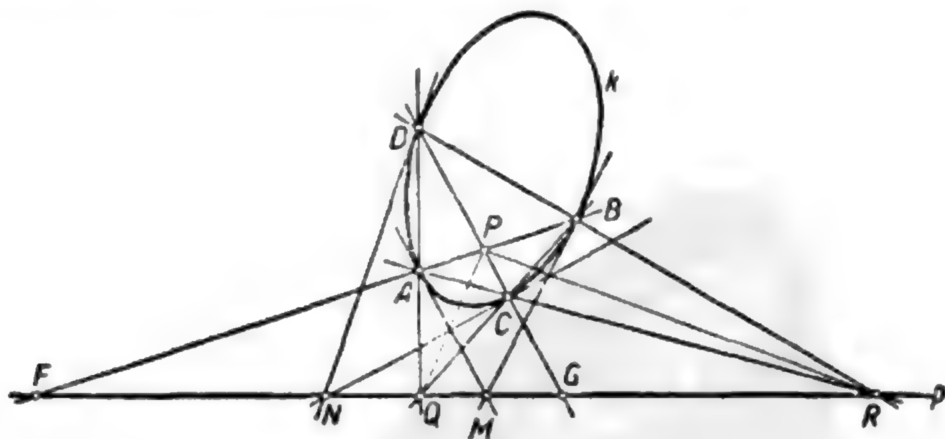


圖 204.

我們也可以把四角形 $ABCD$ 看作是完全四角形，P, Q 和 R 是它的对角線點，而 QR 是对角線。在这个四角形的边 AB 上有四

个調和點：頂點 A, B, 对角線點 P, 以及边 AB 与对角線 $QR\equiv p$ 的交點 F。同樣在 CD 边上有四个調和點：C, D, P 和 G（边 CD 与对角線 p 的交點）。

从上面的敍述裏，我們看到对应點 P 的直線 p 可以用通过點 P 的一条割線來確定。事实上，我們利用割線 AB，直線 p 被兩个點決定：1)曲線 k 在點 A 和點 B 的兩条切線的交點 M 与 2)點 P 对於點 A, B 而言的第四調和點 F。因此，有 $p\equiv FM$。应該注意，割線 CD 的取法是任意的，与 AB 無關。同時利用點 N 和 G 也確定同一条直線 p。所以，利用通过點 P 的割線來確定直線 p 時与割線的取法無關。由於这个緣故，对於內接於曲線 k 而且有點 P 作为一个对角線點的任意完全四角形而言，直線 p 總是它的过另兩个对角線點的对角線

对应已知點 P 的直線 p 叫做这个點的**極線**，而點 P 叫做直線 p 的極點。

根据上面的理由，可以作出已知點 P 關於二次曲線 k 的極線的下列各种定义：

1°. 極點 P 和通过極點的任意割線与曲線 k 的兩个交點的第四調和點 F(或 G)的軌跡叫做極線。

2°. 極線 p 是在过極點 P 的弦的兩个端點所作二次曲線的切線交點的軌跡。

3°. 在內接於曲線 k 而且以極點 P 为一个对角線點的完全四角形裏，过另外兩个对角線點的对角線叫做極線。

很明顯，从極線的这些定义也得到極線的种种作圖法。譬如，通过極點 P 引兩条任意的割線 AB 和 CD，作點組 ABP 和 CDP 的第四調和點 F 和 G：

$$(ABPF)=(CDFG)=-1.$$

直線 FG 就是所求的極線 p。第二种方法：作完全四角形

$ABCD$ 並且求对角線點 Q 和 R。对角線 QR 就是極線 p。

已知直線 p 的極點 P 定义为以直線 p 作極線的點。

已知極線 p，欲作極點 P 時可採用下面的方法。从極線 p 的任意〔外❶〕點 M 引曲線 k 的切線 MA 和 MB，並且作切點的联線 AB。再从極線的另外任意點 N 進行同样的作圖，我們得到另一条切點的联線 CD。於是極點 P 被決定为直線 AB 和 CD 的交點：

$$P = AB \times CD.$$

事实上，點 P 的極線就是直線 $p = MN$。

已知極線所对应極點的唯一性，是从‘兩个不同的極點終是对应兩个不同的極線’推出的（引号裏的这个論断是極線定义的推論）。

我們再注意三角形 PQR。根據極線的定义 3，三角形 PQR 的每个边是它所对頂點的極線。譬如边 $QR \equiv p$ 是點 P 的極線，边 RP 是點 Q 的極線，边 PQ 是點 R 的極線。反过來三角形 PQR 的頂點是它所对边的極點。这样的三角形叫做極三角形。

2. 現在轉到下面的問題上：如果點 P 在二次曲線 k 上，那麼甚麼样的直線該算作它的極線?

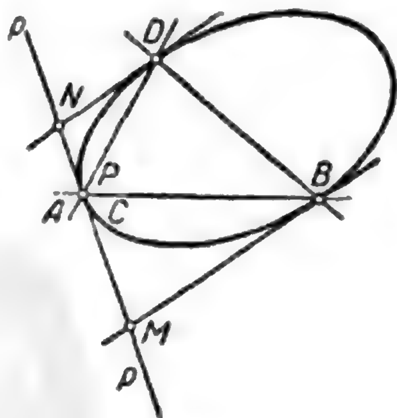


圖 205.

在这种情形下極線的定义 3 是不適用的，因为对於任意割線而言第四調和點都要与點 P 重合。为了弄清这个問題，我們应用定义 2。

假定極點 P 在曲線 k 上。通过點 P 引任意弦 PB 和 PD（圖 205）。在每个弦的端點作切線。弦 PB 的一个端點是點 B，另一个端點就是點 P 本身（點 A 和 P 重合）。完全同样，第二个弦具有端點 D 和 P（點 C

❶ 在每条直線上存在外點，也就是这条直線与二次曲線的切線的交點。

和P重合；比較圖 205 与圖 204）在點B和P的切線相交於點M；在第二个弦的端點D和P的切線相交於點N。因此，M和N兩个點都在与曲線切於點P的切線上，这条切線MN就是定义 2°裏所說的那种點的軌跡。因此当點P位於曲線k上時，我們把这个曲線的在點P的切線叫做點P的極線。如此，在二次曲線k上的點P的極線就是曲線k的在點P的切線p。切於二次曲線k的直線p的極點就是它与这个曲線的切點P。

这样，对於任何位置的已知點或已知直線，建立了它們關於二次曲線的極線或極點的概念。

§ 58. 配極对应与它的性質

1. 設在平面ω上已知某个（非变态的）二次曲線k。於是，根据前一節裏所說的，場ω的每个點P对应確定的一条直線p——點P的極線。反过來，場的任一条直線p_1对应確定的一个點P_1——直線p_1的極點。

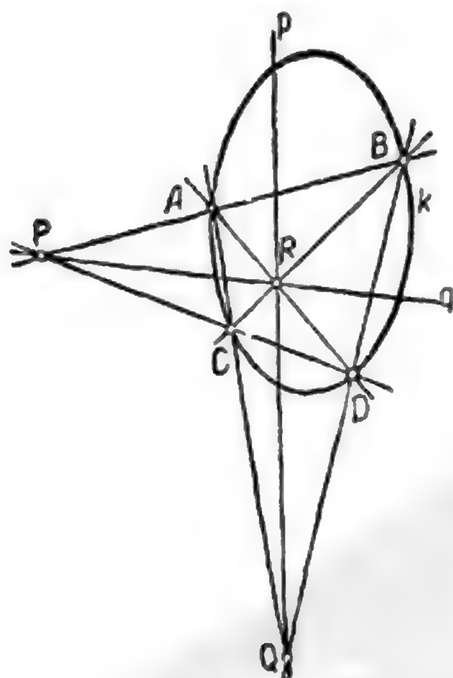


圖 206.

其次我們來研究下面的配極对应的性質，就是所謂著名的配極原則。配極原則可以敍述为：

如果某个點的極線通过第二个點，則第二个點的極線也通过第一个點。

配極原則的正確性，用下面的方法就可以証实。假定，已知點P的極線p通过Q（圖 206）。我們來証明在这种情形下，點Q的極線q也通过點P。过P引任意割線PAB並且标出它与已知

二次曲線 k 的交點 A 和 B 联結點 A 和點 Q，並且用 C 來表示直線 AQ 与曲線 k 的第二个交點。再过 P 引割線 PC，並且用 D 來表示它与曲線 k 的第二个交點。根据(§ 57)極線的定义 3°，完全四角形 $ABCD$ 的对边应該相交於屬於點 P 極線 p 的點。这个四角形的边 AC 与極線 p 交於點 Q。所以它的对边 BD 也与極線 p 交於同一个點 Q，也就是 BD 通过點 Q。由此我們得到 Q 是完全四角形 $ABCD$ 的对角線點。然而，这也就是說，點 Q 的極線 q 通过四角形 $ABCD$ 的另外兩个对角線點。

因为对角線點中的一个是 P，所以直線 q 通过點 P（証完）。

应用配極原則，我們可以進行下面的作圖。

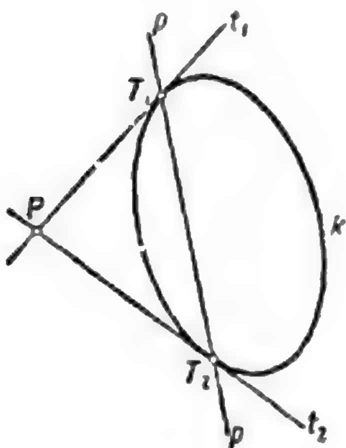


圖 207.

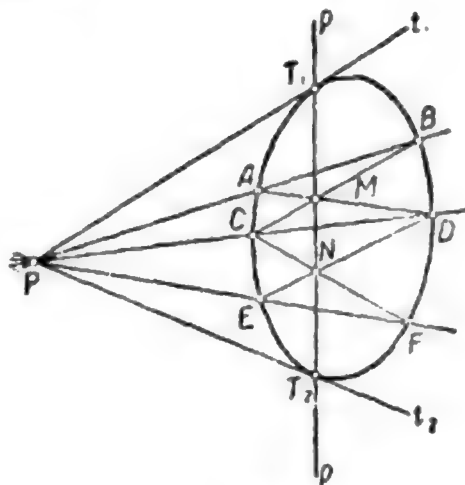


圖 208.

假設在二次曲線 k 的外部有一個點 P（圖 207）。於是从點 P 可以引这個曲線的兩条切線。我們用字母 T_1 和 T_2 来表示这些切線的切點。切線 $t_1=PT_1$ 是切點 T_1 的極線。同样，切線 $t_2=PT_2$ 是切點 T_2 的極線。因为極線 t_1 和 t_2 通过點 P，所以(點 P 的)極線 p 应該通过點 T_1 和 T_2。这里我們得到了極線的作圖法、極線是从極點 P 所作切線的切點联線。

反过來，利用这种性質可以作二次曲線的切線。

設有二次曲線 k（已畫出）与它外部的一个點 P（圖 208）。我們利用三条割線 PAB，PCD 和 PEF 來作點 P 的極線。極線 p 应該通过兩个完全四角形 $ABCD$ 和 $CDEF$ 的对角線點 M 和 N。極線 MN 与曲線 k 的交點就是从已知點 P 所作切線的切點 T_1 和 T_2。

2. 根据配極原則，我們可以說配極对应保持元素的接合性，也就是在直線 q 上的點 P 对应通过 Q 點的直線 p。因此，配極对应滿足異素对应定义裏所敍述的所有条件（§56）。

同時配極对应具有对合的性質。这种性質从極點与極線的定义本身就可以推出。如果點 P 对应極線 p，反过来，直線 p 也对应點 P。所以，場的配極变換与它的逆变換重合。这可以用下面含符号的恆等式表示：

$$\Pi=\Pi^{-1},$$

这裏 Π 表示場到它自身的配極变換，而 Π^{-1} 表示它的逆变換。

兩次应用配極变換就可以得到恆等的場，也就是它的所有元素保持不变。用符号的形式可以表示成

$$\Pi\cdot\Pi=\Pi^2=1.$$

事实上，點 P 經变換 Π 後变为直線 p，当作第二个变換時，場的直線 p 变为點 P。所以場 ω 的每个元素变为它自身。

因此，配極对应是異素对应，並且具有对合的性質。

从極點与極線的定义我們看到，僅在極點屬於二次曲線 k 並且同時極線切於这个曲線的情形下它們才是接合的。这使我們能够定义建立點与直線間配極对应的基本曲線 k 为：在自己極線上的極點的軌跡，或通过自己極點的極線的包絡線（圖 209）。

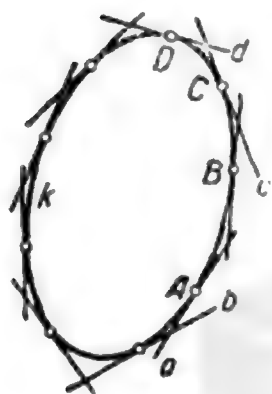


圖 209.

3. 根據这些理由，我們可以擴大配極对应的概念，也就是把場变为它自身而且具有对合性質（也就是 $\Pi^2=1$）的每个異素变換可以看作是配極变換。至於基本二次曲線 k 可以利用上面所說的接合对应元素对來定义。如果在配極对应裏沒有和自己極線接合的極點，我們就說基本二次曲線 k 是虛的。作为这一類配極对应

的例子，我們來看一看在把裏構成正交对应的直線与平面的截影。首先注意：場 ω 的點与直線間的配極对应，利用从任意中心 Ω 投影的方法，可以变为把的直線与平面間的配極对应。这从任意把的中心 Ω 向場 ω 的元素作投射

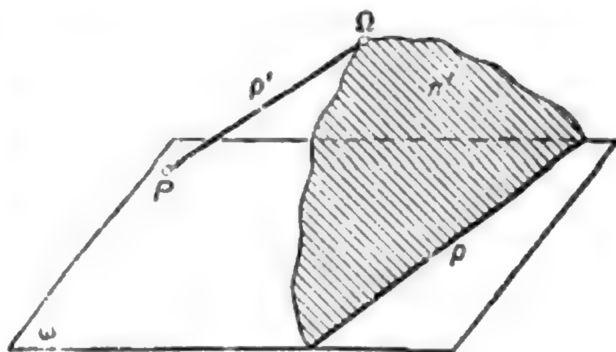


圖 210.

(圖 210)，就很容易断定：这時場 ω 的點 (P) 变为把 Ω 的直線 (p')，而場 ω 的直線 p 变为把 Ω 的平面 (π')。在把 Ω 裏，我們得到直線 (p') 与平面 (π') 的配極对应。反过来，用平面 ω 截断又可以將把裏的直線与平面的对应变为場裏點与直線的对应。

假定把 Ω 的直線与平面的配極对应用下面的方式確定。把的每条直線 p' 对应垂直於它的平面 π'，把的每个平面 π' 对应垂直於它的直線 p'，这样，在把裏就建立了直線与平面的正交配極对应❶。

用平面 ω 將把 Ω 截断，在平面 ω 上我們就得到點与直線的配極对应。事实上，場 ω 的每个點 P 对应確定的直線 p。直線 p 可以用下面的方法來作圖。引直線 $P\Omega \equiv p'$，並且作平面 $\pi' \perp p'$。於是 $p = \pi' \times \omega$。

顯然，直線 p 对应點 P，而點 P 可以从相反的作法求得。於是，就有場 ω 的點 (P) 与直線 (p) 的配極对应。这時，顯然是不存在和自己極線 p 接合的點 P，因为直線 p' 不能屬於垂直於它的平面 π'。由此推得在这种情形下，基本二次曲線是虛曲線。

我們还需指出，使場变为自身的每个異素变换 R 可以想像是

❶ 这种对应是配極的，因为它是二級元素的異素对应並且具有对合性質。

同素变换 K 与配極变换 П 的積

事实上，兩个異素变换的積總是同素变換，因为这時點首先变为直線(第一个異素变换)，然後这条直線再变为點(第二个異素变换)。同样在兩次異素变换之後，直線变为直線。根据这个我們可以寫出。

$$R \cdot П = K.$$

現在再作变换 П；於是，將有

$$R \cdot П \cdot П = R \cdot П^2 = R = K \cdot П,$$

也就是 $$R = K \cdot П$$ (証完)。

§ 59. 點列与線束的配極共軛元素的对合

1. 假定在平面 ω 上有二次曲線 k，關於它建立了點与直線的配極对应。在这个对应裏，點列 s 的點对应線束 S 的直線。我們已經說明过，对於每个異素对应(§ 56)，線束 S 与它的对应點列 s 是射影的：

$$S(a, b, c, \cdots) \barwedge s(A, B, C, \cdots).$$

所以，極線的線束和对应的極點的點列是射影对应的。

現在我們引入配極对应的共軛元素的概念。如果兩个點，其中一个在另一个的極線上，就把它們叫做共軛點。

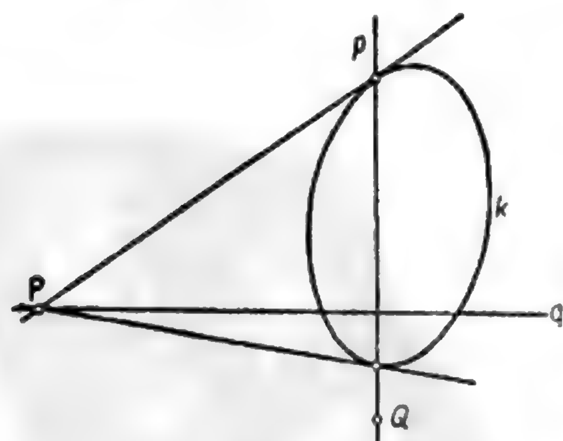


圖 211.

同样，如果兩条直線，其中一条通过另一条的極點，把它們也叫做共軛直線。

从共軛的定义得到，已知點 P 的共軛點，應該在它的極線 p 上。另一方面，極線 p 的每个點 Q 与點 P 共軛，因为这个點的極線 q 通过 P (圖 211)。同样，通过

極點 P 的所有直線都是已知直線 p 的共轭直線。

設有場的任意直線 s（圖 212）。这条直線的每个點 A 对应同一条直線 s 上的唯一的共轭點。这样的點，顯然是點 A 的極線 a 与直線 s 的交點 A'。因为共轭是兩个點（或兩条直線）的相互性質，所以點 A' 对应共轭點 A（並且極線 a' 通过點 A）。这样，在直線 s 上得到共轭點的对应。不难断定，这种对应是对合对应。实际，點列 A（在直線 s 上）射影对应極線的線束 a（具有中心 S）。另一方面，極線的線束 a 透視於點列 A'（在直線 s 上），所以點列 A（在直線 s 上）射影对应點列 A'（在直線 s 上）。此外，我們已經知道點 A 和 A' 的对应是相互的。由此我們推得共轭點对 A 和 A' 構成对合。

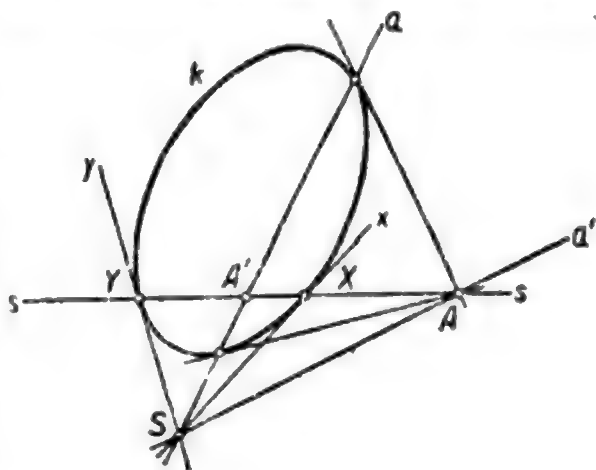


圖 212.

不难看出，这种对合的二重點是直線 s 与基本二次曲線 k 的交點 X 和 Y。事实上，點 X 的極線 x 是曲線 k 在點 X 的切線。因此它与直線 s 的交點就是點 X，所以，點 X 自身对应。对於第二个交點 Y 也可以这样說明。

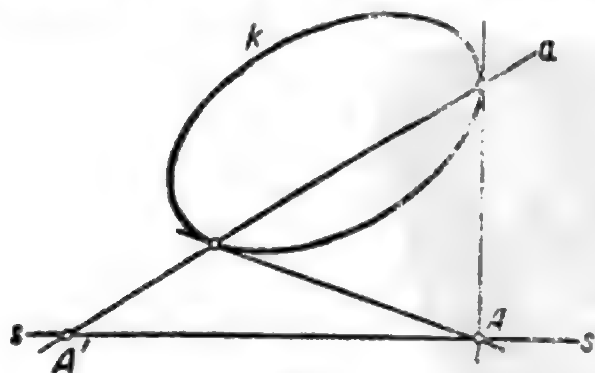


圖 213.

从上面的敍述可知，曲線 k 在每条直線 s 上建立了共轭點的对合。如果直線 s 与曲線 k 交於兩个點（如圖 212），則这种对合是**双曲型对合**。如果直線 s 不与曲線 k 相交（圖 213），則是**橢圓**

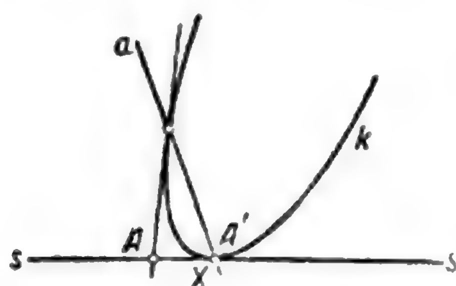


圖 214.

型对合，因为在这种情形下对合沒有二重點。最後，如果直線 s 与二次曲線 k 相切(圖 214)，則是拋物型对合。在最後的情形下，點列 s 的任意點都对应切點 X。例如，这条直線的點 A 对应通过直線 s 的切點 X 的極線 a，因此共軛點 A' 与點 X 重合。

以上所有的敍述表明，在線 s 上共軛點的对合的二重點可以看作是屬於直線 s 与曲線 k 的點。按对合的類型，可以判断这样點的存在或直線 s 与曲線 k 的相關位置。如果曲線 k 在直線 s 上所確定的对合是双曲型对合，則直線 s 与曲線 k 交於兩个點。如果这个对合是拋物型对合，則直線 s 与曲線 k 相切。最後，在椭圓型对合的情形，直線 s 与曲線 k 沒有公共點。在最後这种情形下，我們也可以說直線 s 与曲線 k 的交點是虛點。这就是椭圓型对合的虛二重點(§ 34)。

2. 點列 s 上共軛點的对合对偶地对应線束 S 裏共軛直線的对合。

設有線束 S (圖 212)。这時線束的每条直線 a 对应同一个線束的唯一的共軛直線 a'。圖 212 表明它的作法。我們得到線束 S 的共軛直線 a,a' 的对合。这个对合的二重直線是从點 S 到基本二次曲線 k 的兩条切線 x 和 y。事实上，切線 x 通过作为直線 x 極點的切點 X。因此直線 x 与自身的共軛直線重合。關於切線 y 也同样，如果點 S 在外部，則从它

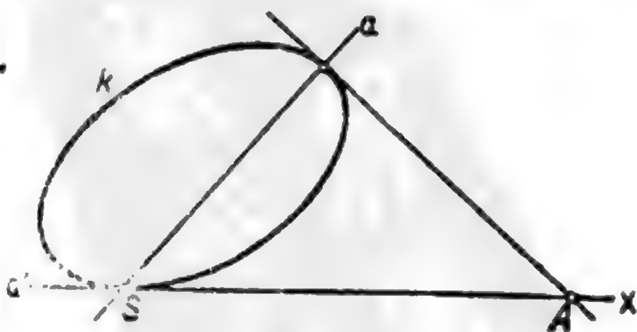


圖 215.

到曲線 k 可以引兩条切線如(圖212)。在这种情形下，線束 S 的共軛直線的对合是**双曲型对合**。如果點 S 在曲線 k 上(圖 215)，則在这个點的切線 x 对应線束 S 的所有直線。因为从作圖法知道(也可以从配極对应的相互性原則得到)，直線 a 的極點 A 在直線 x 上。因此共軛直線 $a'=SA$ 与直線 x 重合。由此我們推得在線束 S 裏共軛直線的对合是**拋物型对合**。

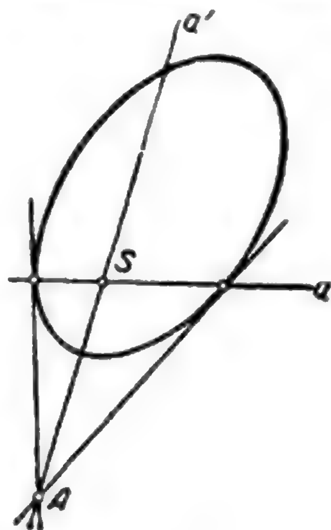


圖 216.

最後我們來研究點 S 在內部的情形。在这种情形下，線束 S 的共軛直線的对合沒有二重直線，因为不存在从點 S 到曲線上的实切線(圖 216)。这是**橢圓型对合**。

也像对直線 s 上共軛點的对合一样，在線束 S 的中心在內部的情形下，可以說从點 S 到曲線 k 的切線是虛直線，並且是線束 S 裏共軛直線的橢圓型对合的虛二重直線。

§ 60. 含射影座標的二次曲線方程式

兩个射影一次線束对应射線交點的軌跡叫作二次曲線或二次點列。

在構成軌跡的射影線束成透視的特殊情形下，二次曲線分解为兩条直線。如果用二次曲線分解成的兩条直線作座标三角形的兩个边，例如边作 YZ 和 XZ，則这兩条直線的齐次射影座标方程式应該是

$$x=0,\quad y=0.$$

[因为分别有：$d_1=0$ 和 $d_2=0$，参考 § 53)]。

所以，能分解为直線对的二次曲線方程式可以表示为下面的

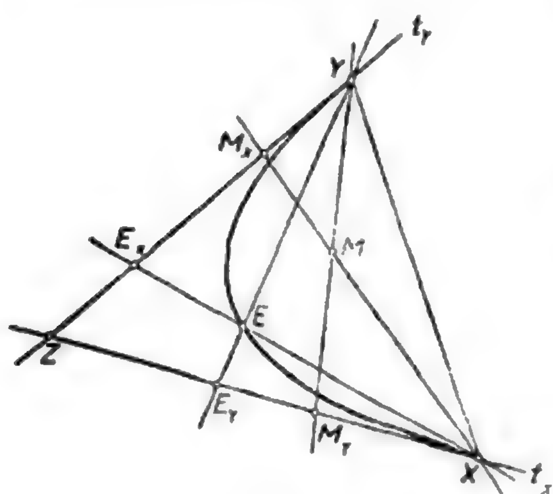


圖 217.

形狀：

$$x \cdot y = 0.$$

这就是能分解的二次曲線含齐次射影座标的最簡方程式。

現在我們來研究構成二次曲線的兩个線束是一般射影線束的情形。

用字母 X 和 Y 表示構成曲線的射影線束的中心。假定第一个線束的直線 XY 对应第二个線束的直線 t_y，而第二个線束的直線 YX 对应第一个線束的直線 t_x。用字母 Z 來表示直線 t_x 和 t_y 的交點。

取 X, Y 和 Z 三个點作为座标三角形的頂點。顯然，这三个點不能在一条直線上。

在二次曲線上，取与構成曲線的線束中心 X 和 Y 不同的某个點作为單位點 E。顯然點 E 不能在座标三角形的边上。

用字母 M 表示平面上任意點。用字母 E_x 和 M_x 表示第一个線束的射線 XE 和 XM 与座标三角形对边 t_y 的交點。同样，用字母 E_y 和 M_y 表示第二个線束的射線 YE 和 YM 与对边 t_x 的交點。

如果點 M 屬於射影線束 (X) 和 (Y) 所構成的二次曲線，則第一个線束的四条射線 XM, XE, XZ, XY 的交叉比應該等於第二个線束裏四条对应射線 YM, YE, YX, YZ 的交叉比(§ 38)。

逆命題也是正確的：如果上面所說的交叉比相等，則點 M 屬於點 X, Y, E 与切線 t_x 和 t_y 所確定的二次曲線。

因此，上面所說的交叉比的相等是點 M 屬於已知二次曲線的

必要且充分的条件。

我們用射影座标来表示这个条件

四条射線的交叉比(XM, XE, XZ, XY)可以用和它相等的透視點列的四个點的交叉比(M_xE_xZY)来表示。

同样，第二个線束裏四条射線的交叉比可以表示为：

$$(YM, YE, YX, YZ)=(M_yE_yXZ).$$

因此，交叉比的等式可以表示成下面的形狀：

$$(M_yE_yXZ)=(M_xE_xZY)=\frac{1}{(M_yE_yZX)}.$$

注意，括号裏的式子是點 M 的射影座标：$x'=(M_yE_yZX)$，$y'=(M_xE_xZY)$，我們可以寫出：$y'=\frac{1}{x'}$，或：$x'y'-1=0$。这就是二次曲線的射影座标方程式

变为齐次射影座标，也就是，令 $x'=\frac{x}{z}$，$y'=\frac{y}{z}$，我們得到含齐次射影座标的二次曲線最簡方程式：

$$xy-z^2=0.$$

§ 61. 含齐次射影座标的一般二次方程式研究

在这一節裏，我們来研究一般二次方程式

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx=0, \qquad (1)$$

这裏的 x, y, z 表示平面上的流動射影座标。

平面上滿足这个方程式的點集合叫做二次代數曲線，这样，所引進的二次曲線概念的研究証明它是以前我們常常使用的作为兩个射影線束对应射線交點軌跡的二次曲線（二次點列）定义的擴展。

同時研究射影平面上的实點和虛點我們就得到二次曲線概念的擴展。

为了这个目的，我們將射影平面上的點看作是由三个齐次射

影座标$(x:y:z)$決定的，而这些座标可以有不同時等於零的任意複數值。如果兩个點$(x_1:y_1:z_1)$和$(x_2:y_2:z_2)$合於等式

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2},$$

則它們被看作是重合的。

顯然，平面上點的射影座标的这样擴展的定义，包括我們以前所研究的平面上对应三个实數的所有实點。但是另一方面，現在我們也把虛點合併在一起，这些虛點对应複數座标$(x:y:z)$而且不存在三个实數$(x_0:y_0:z_0)$滿足条件：

$$\frac{x_0}{x}=\frac{y_0}{y}=\frac{z_0}{z}.$$

因此，我們应該把二次代數曲線理解为滿足二次方程式(1)的所有实點与虛點的集合。

在前一節裏我們曾說明过，利用射影線束所得到的二次曲線可以用齐次射影座标的二次齐次方程式來表示。因此，这些曲線包含在一般方程式(1)所表示的幾何圖形裏。然而，从以後的研究我們將会看到，如果我們在研究射影平面上滿足方程式(1)的实點時同時也研究这样的虛點，那麼方程式(1)还包含另外的幾何圖形。

我們的問題是尋求方程式(1)所確定的二次曲線的所有類型❶。

为了这个目的，我們利用能把方程式(1)化为最簡形狀的座标变換方法。

I. 假定，二次代數曲線至少有兩个实點。我們來証明，在这种情形下它是二次點列，或者是不同的或是重合的直線对。

---

❶ 此处所引用的研究二次方程式的方式是別里別列金（Д. П. Перепелкин）教授在莫斯科國立列寧師範学院所講授的射影幾何教程中所应用的。

用二次曲線的兩个實點作为座标三角形的頂點 X 和 Y。在这种情形下，點 $X(1:0:0)$ 和 $Y(0:1:0)$ 的座标应該滿足曲線的方程式（1）。把这些座标代入曲線的一般方程式，則应有：$a_{11}=0$，$a_{22}=0$。所以曲線方程式应該是下面的形狀：

$$a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx=0. \qquad (2)$$

其次，進行保持座标三角形頂點 X 和 Y 不变的座标变换。为了这个，我們利用 §53 的公式（8′）。在这些公式裏令 $C_3=1$，顯然，这並不影响它的一般性，把座标变换公式改寫成下面的形狀：

$$\rho x=A_1\bar{x}+C_1\bar{z};\quad \rho y=B_2\bar{y}+C_2\bar{z};\quad \rho z=\bar{z};\quad (A_1\cdot B_2\neq 0).$$

代換方程式(2)的座标 x,y,z 以後，我們得到二次曲線含新射影座标的方程式：

$$a_{33}\bar{z}^2+2a_{12}(A_1\bar{x}+C_1\bar{z})(B_2\bar{y}+C_2\bar{z})+$$
$$+2a_{23}(B_2\bar{y}+C_2\bar{z})\bar{z}+2a_{31}\bar{z}(A_1\bar{x}+C_1\bar{z})=0$$

或者：

$$\bar{z}^2(a_{33}+2a_{12}C_1C_2+2a_{23}C_2+2a_{31}C_1)+\bar{x}\bar{y}\cdot 2a_{12}A_1B_2+$$
$$+\bar{y}\bar{z}^2\cdot 2B_2(a_{12}C_1+a_{23})+\bar{z}\bar{x}\cdot 2A_1(a_{12}C_2+a_{31})=0.$$

下面分兩种情形来研究：

1）$a_{12}\neq 0$。这時可以令

$$C_1=-\frac{a_{23}}{a_{12}};\quad C_2=-\frac{a_{31}}{a_{12}}$$

而曲線方程式具有下面形狀：

$$P\bar{z}^2+\bar{x}\bar{y}\cdot 2a_{12}A_1B_2=0.$$

这裏 $$P=a_{33}+2a_{12}C_1C_2+2a_{23}C_2+2a_{31}C_1.$$

如果 $P\neq 0$，則可以令 $2a_{12}A_1B_2=-P$，而曲線方程式就成为下面的形狀：

$$\bar{z}^2-\bar{x}\bar{y}=0.$$

也就是二次點列。

又如果 $P=0$，則曲線方程式变为下面的形狀：

$$\bar{x}\bar{y}=0.$$

因此,是直線对。

2) $a_{12}=0$。在这种情形下,方程式(2)有下面形狀:

$$\bar{z}(a_{33}\bar{z}+2a_{23}\bar{y}+2a_{31}\bar{x})=0.$$

顯然,它表示直線对。在特殊的情形下,当 $a_{23}=a_{31}=0$ 時,这兩条直線重合。

如此,我們已經証明如果二次曲線有兩个实點,則它是二次點列,或者是(不同的或重合的)直線对。

II. 我們再研究另一种情形,就是二次曲線只有一个实點或完全沒有实點。方程式 $x^2+y^2=0$ 所表示的曲線可以作为第一類曲線的例子,它只有一个座标为(0:0:1)的实點。我們可以証明只有一个实點的每个二次曲線方程式都能化为这样的形狀。

这样的曲線可以看作是能分解成交於实點的虛直線对。而这个點也是这种曲線的唯一实點。

方程式

$$x^2+y^2+z^2=0$$

所表示的曲線可以作为完全沒有实點的曲線的例子。这个曲線的所有點都是虛的。

現在我們可以列举一般方程式(1)所表示的二次曲線的所有可能的類型。

有下列的五种類型:

1) 二次點列(实际不能分解的二次曲線,"卵形"曲線)。

2) 一对不同的实直線。

3) 一对重合的实直線。

4) 一对相交於实點的虛直線。

5) 由一些虛點所構成的純虛曲線。

§ 62. 面束

在第四章裏(二次曲線射影理論)我們曾經使用过點列与線束

構成二次圖形(二次點列与二次線束)。在研究二次曲面的射影的構成問題時，除了所提到的一次圖形外，还要使用面束。因此，我們講一講面束的交叉比与各种一次圖形的射影对应概念是有用的。

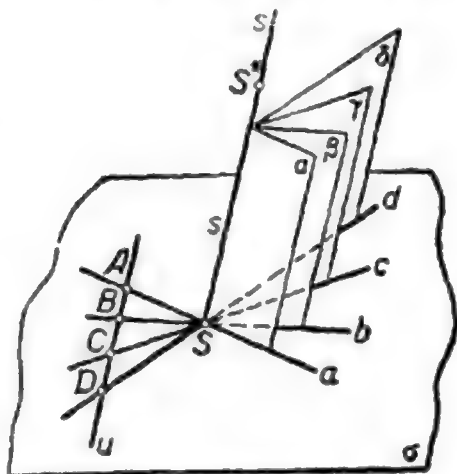


圖 218.

我們來研究面束 $s(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\cdots)$。用任意平面 σ 把它截断(圖 218)，我們得到線束 $S(a,b,c,d,\cdots)$。这样的線束叫做面束的透視線束。面束 s 裏四个平面的交叉比我們將看作是等於它的透視線束 S 裏四条对应直線的交叉比：

$$(\alpha\beta\gamma\delta)=(abcd).$$

顯然交叉比的值与截平面的位置無關。事实上，任何其他的截平面 σ' 和已知面束的截影是和線束 S 透視的線束 S'，因为这兩个線束是平面 σ 和 σ' 間透視同素对应的对应線束，透視同素对应的中心是直線 s 上的任意點 S^*。特别是可以取垂直截影(垂直於面束軸的)。於是交叉比可以用面束平面所成二面角的平面角正弦來表示：

$$(\alpha\beta\gamma\delta)=\frac{\sin(\alpha,\gamma)}{\sin(\beta,\gamma)}:\frac{\sin(\alpha,\delta)}{\sin(\beta,\delta)}.$$

用直線 u 截面束 s，得到它的透視點列：

$$u(A,B,C,D,\cdots)\barwedge s(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\cdots).$$

通过直線 u 作平面 σ，則有：

$$(ABCD)=(abcd)=(\alpha\beta\gamma\delta).$$

因此，我們看到，面束 s 裏四个平面的交叉比等於它的透視點列 u 裏对应點的交叉比。

把交叉比概念推廣到面束就可以定义任意兩个一次圖形(點

列，線束，面束）的射影对应。

兩个一次圖形的元素所成一一对应，其中一个圖形的四个元素的交叉比總等於另一个圖形的四个对应元素的交叉比，这种对应就叫做射影对应。

§ 63. 二次錐面与二次面束

假定在平面 ω 上有二次曲線 k（圖 219）从平面 ω 外任意點 S 向曲線 k 上的所有點投射直線，所有投射直線的集合叫做二次錐面，而投射直線叫做錐面的母線

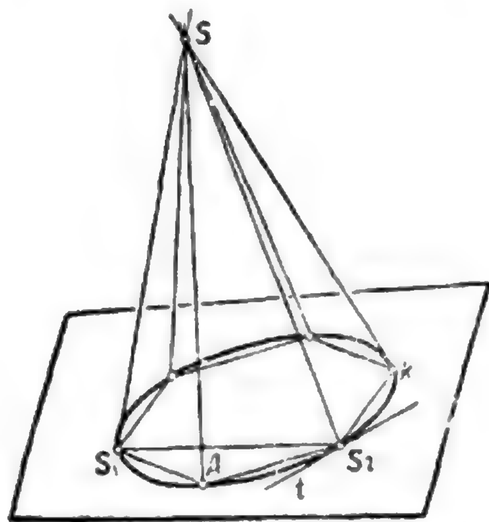


圖 219.

我們容易断定，一直線不是錐面的母線，它与錐面的交點不能多於兩个。事实上，通过这样直線与錐面頂點 S 的平面不能与錐面交於多於兩条的母線。因此，直線与錐面的交點不能多於兩个。

其次，我們来証明对於二次曲線已推得的某些定理，可以用作二次錐面的对应定理構成的根据。

譬如，在 § 38 裏曾經証明过，从二次曲線上某兩點（例如 S_1 和 S_2）向二次曲線的點投射直線，可以得到兩个射影線束。从中心 S（錐面的頂點）向这兩个線束投射平面，顯然就得到兩个射影面束，它們的軸是錐面上通过線束中心的母線（直線 SS_1 和 SS_2）。如果 A 是曲線 k 的點，則射線 S_1A 和 S_2A 在射影線束 S_1 和 S_2 裏是对应的。同样，平面 SS_1A 和 SS_2A 在射影面束 SS_1 和 SS_2 裏是对应的。我們看到，射影面束 SS_1 和 SS_2 的对应平面相交於錐面的母

線 SA，因此，就有：

二次錐面的母線是兩个射影面束对应平面的交線，而錐面的任意兩条母線可以作面束的軸。

另一方面：

軸在一个平面上的兩个射影面束構成一个二次錐面。

事实上，用 S 表示射影面束的軸的交點，这兩个面束与任意平面 ω 的截影是一对射影線束，它們的中心是已知面束的軸与平面 ω 的交點 S_1 和 S_2（圖 219）。線束 S_1 和 S_2 在平面上構成二次曲線 k。射影面束 SS_1 和 SS_2 的对应平面交線通过曲線 k 的點与點 S——兩个面束的軸的交點。因此，这些直線構成有頂點 S 与導線 k 的二次錐面（証完）。

在特殊情形下，已知的射影面束可能是透視的，这就是說它們投射作为它們公共截影的同一个線束。例如，假定有軸 s_1 和 s_2 的面束投射平面 ω 上的同一个線束 $S(a, b, c, \cdots)$（圖 220）。这時投射的面束的軸 s_1 和 s_2 通过中心 S。很明顯，所求的面束 s_1 和 s_2 对应平面交線的軌跡是由線束 $S(a, b, c, \cdots)$ 和通过面束軸 s_1 和 s_2 的平面 σ 上所有直線組成，後者是由於平面 σ 自身对应，因为第一个面束的平面 s_1s 对应第二个面束的平面 s_2s。

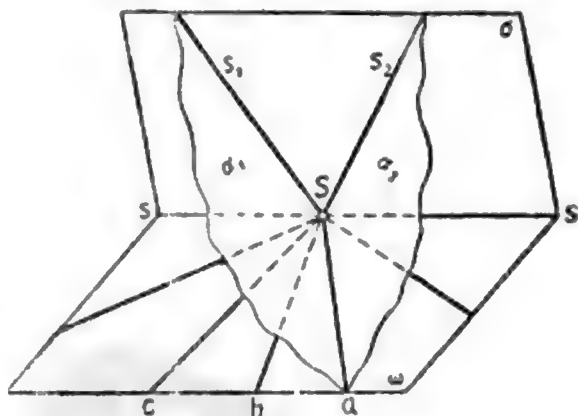


圖 220.

因此，在兩个透視面束的情形下，二次錐面分解为兩个平面（ω 和 σ）。

2. 再回到一般的情形（圖 219），如果我們研究在平面 ω 上構成二次曲線 k 的射影線束 S_1 和 S_2，我們知道这兩个線束的公共

射線对应在線束中心的切線。例如,射線S_1S_2(看作它是第一个線束的射線)对应在第二个線束中心S_2的切線t。当从錐面頂點S投射時,就得到第二个面束裏的切面S_t。这个平面是第一个面束裏平面SS_1S_2的对应平面。母線SS_2是切面对錐面的"相切線"。从二次曲線的理論我們知道,这裏推導出來的論据可以推廣到曲線的所有點上。於是顯然也可以推廣到二次錐面。因此可以說:

通过二次錐面的每一条母線都能作一个切面。

二次曲線所有切線的集合構成一个二次線束(§ 43)。当从錐面的頂點S向二次線束投射時,就得到二次面束。

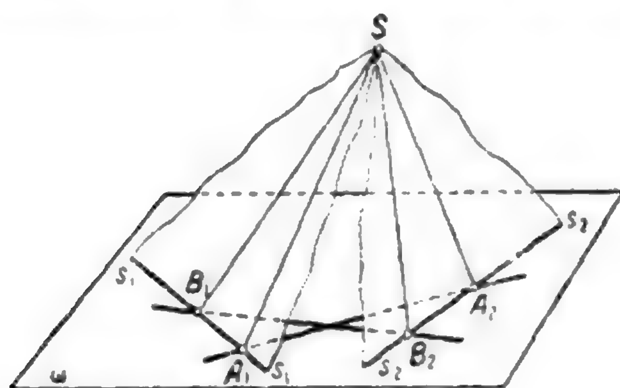


圖 221.

由上面關於二次錐面切面的敍述,我們可以作出下面的結論:

二次錐面的切面構成一个二次面束。

用下面的方法可以得到二次面束的射影構造。我們來研究平面ω上的二次線束(圖 221)。它可以利用線束裏任意兩条直線上的兩个射影點列構成。設这兩条直線是直線s_1和s_2。由中心S向點列s_1和s_2投射,就得到具有公共中心S但在不同平面上(就是在平面s_1S和s_2S上)的兩个射影線束。因此有:

$$S(SA_1, SB_1, \cdots)\barwedge S(SA_2, SB_2, \cdots).$$

这兩个線束裏的对应射線对所確定的平面,也就是平面SA_1A_2, SB_1B_2構成一个二次面束,因为其中每一个都从中心S投射二次線束的相当直線。

所以在不同平面上而具有公共中心的兩个射影線束構成一个二次面束。

以上所有叙述表明，使用射影方法，可以把二次點列与二次線束的性質移到二次錐面或二次面束上。

特别是，關於二次曲線内接六角形的巴斯加定理(圖 219)与關於二次曲線外切六边形的布利安桑定理，对於二次錐面成为下面的形狀：

1°. 二次錐面的任意内接六面形❶相对面的三条交線在一个平面上。

2°. 通过二次錐面的任意外切六面形相对稜的三个平面相交在一条直線上。

3. 現在我們在对偶原理的观點下來研究二次錐面与二次面束的構造。我們知道平面与直線的把(根据空間对偶原理)是點与直線的場的对偶形。因此按对偶原理，平面上的二次點列与二次線束相当平面与直線的把裏的某些幾何圖形。假定在平面 ω 上有一个二次線束。我們知道線束的直線在其中任意兩个固定的直線上構成兩个射影點列。根据对偶原理，底屬於平面 ω 的兩个射影點列，对应底屬於點 Ω(把的中心)的兩个射影面束。但是，我們知道，这样兩个面束的交線構成二次錐面。於是，二次錐面是二次線束的对偶圖形。

其次，我們再來研究平面 ω 上的二次曲線。从曲線上的任意兩个固定點 S_1 和 S_2 向曲線上的點投射，我們就得到兩个射影線束。按对偶原理，平面 ω 的點 S_1 和 S_2 对应通过把中心 Ω 的平面 σ_1 和 σ_2。而平面 ω 上的射影線束 S_1 和 S_2 对应屬於把 Ω 且在平面 σ_1 和 σ_2 上的射影線束。但是，我們知道，这样的兩个射影線束構成一个二次面束。因此二次面束是与二次曲線(二次點列)成对偶形的幾何圖形。

这样就作成點与直線場裏的二次圖形和平面与直線把裏的二

❶ 在 1°与 2°的假定中所說的六面形是各面都通过錐面頂點 S 的六面形。

次圖形中間的对偶關係。

此外，我們可以研究點与直線的場（或平面与直線的把）本身元素間的对偶關係。

在这个观點下，我們知道，二次曲線对应二次線束。

顯然，在平面与直線的把裏，二次面束該对应二次錐面。

§ 64. 二次直紋曲面的射影構成

1. 前一節裏已經說明過，軸在一个平面上（因而相交）的兩个射影面束構成一个直紋曲面——二次錐面。这裏自然会發生一个問題，就是：軸是交叉直線（也就是不在一个平面上的直線）的兩个射影面束能得到那种幾何圖形

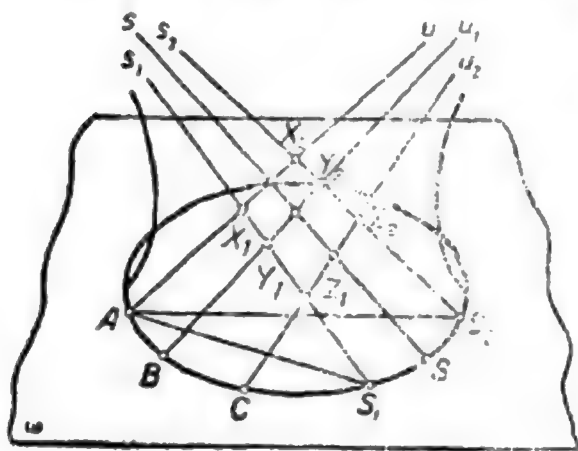


圖 222.

假定有兩个射影面束，它們的軸 s_1 和 s_2 不在一个平面上（圖 222）。第一个面束的每个平面 σ_1 对应第二个面束的平面 σ_2。我們來研究已知面束的对应平面 σ_1 和 σ_2 交線的軌跡。这个軌跡具有下面的性質：

1°. 任意平面(ω)与它相交成二次曲線。

事实上，平面 (ω) 与射影面束 s_1 和 s_2 相交成兩个射影線束 S_1 和 S_2。

这兩个線束的对应射線（例如 S_1A 和 S_2A）通过平面(ω)与所研究的軌跡(u)裏的直線的交點(A)，因此这些交點(A)構成二次曲線。

在特殊情形下，如果平面 ω 通过已知兩个面束的一个軸，例如

s_1，則二次曲線分解为一对直線，就是軸 s_1 与平面 ω（在这种情形下屬於面束 s_1）和第二个面束 s_2 裏对應平面的交線。

2°. 不屬於所研究的軌跡的任意直線与軌跡的交點不多於兩个。

实际上，过这条直線作任意平面，这个平面与直線的軌跡相交於二次曲線。因此，已知直線与所研究的軌跡的交點也就是直線与这个二次曲線的交點。但是这样的交點不能多於兩个。

如果已知直線与二次曲線有三个公共點，那麼就是說，曲線分解为一对直線，其中的一条是已知直線。所以已知直線全部屬於所研究的軌跡。上面所說的直線軌跡的性質給出了把它叫做**二次直紋曲面**的根據。

2. 为了進一步研究这類曲面的性質，我們再回到圖 222。假定用字母 u，u_1 和 u_2 表示由射影面束 s_1 和 s_2 所構成的二次直紋曲面的三条直線（母線）。在这种情形下，平面对 s_1u, s_2u；s_1u_1, s_2u_1；s_1u_2, s_2u_2 是对应平面对。用 X_1, Y_1, Z_1 表示平面 s_2u，s_2u_1 和 s_2u_2 与直線 s_1 的交點，而用 X_2, Y_2, Z_2 表示平面 s_1u, s_1u_1, s_1u_2 与直線 s^2 的交點。於是就有：

$$u\equiv X_1X_2,\quad u_1\equiv Y_1Y_2,\quad u_2\equiv Z_1Z_2.$$

點列 $X_1, Y_1, Z_1, \cdots$ 与面束 s_2 透視，同時點列 $X_2, Y_2, Z_2, \cdots$ 与面束 s_1 透視。但面束 s_1 和 s_2 是射影的，因此點列 $s_1(X_1, Y_1, Z_1,\cdots)$ 和 $s_2(X_2, Y_2, Z_2, \cdots)$ 也是射影的。於是有：

二次直紋曲面的母線（$u, u_1, u_2, \cdots$）与射影面束的軸（s_1 和 s_2）相交成兩个射影點列

$$s_1(X_1, Y_1, Z_1, \cdots)\barwedge s_2(X_2, Y_2, Z_2, \cdots).$$

从得出这个命題的論証过程就可以斷定它的逆命題的正確性：

如果有兩个射影點列（$X_1, Y_1, Z_1, \cdots$）和（$X_2, Y_2, Z_2, \cdots$）它們

的底是交叉直線，則联接这兩个點列对应點的直線是二次直紋曲面的母線。

事实上，把點列$(X_1, Y_1, Z_1, \cdots)$和$(X_2, Y_2, Z_2, \cdots)$投射成有軸s_2和s_1的兩个面束，我們得到：

$$s_2(s_2X_1, s_2Y_1, s_2Z_1, \cdots) \barwedge s_1(s_1X_2, s_1Y_2, s_1Z_2, \cdots).$$

因此就有構成二次直紋曲面的兩个射影面束 这兩个面束的对应平面相交於直線$X_1X_2, Y_1Y_2, Z_1Z_2, \cdots$，这些直線就是二次曲面的母線。

应該注意，兩个射影面束对偶地对应兩个射影點列。因此我們有兩种互相对偶的方法構成二次直紋曲面：用射影面束和用射影點列。

3. 現在我們更詳細研究二次直紋曲面母線的性質。直紋曲面的任意兩条母線u_i和u_k顯然不相交，因为，在相反的情形下，它們就要在一个平面上，因而直線s_1和s_2也要在一个平面上，这与我們的假定矛盾。另一方面，我們已經知道，每条母線与兩个軸s_1和s_2相交於射影點列的对应點。

設某条直線s与二次直紋曲面的三条母線（例如u, u_1和u_2）相交。在这种情形下，直線s与曲面有三个公共點，因而它的所有點都屬於曲面。我們來証明直線s与直紋曲面的所有母線都相交。

母線$u, u_1, u_2, \cdots$与直線s_1和s_2交於兩个射影點列

$$(X_1, Y_1, Z_1, \cdots)\text{和}(X_2, Y_2, Z_2, \cdots)$$

的对应點。

把这兩个點列投射成具有公共軸s的兩个平面束。我們得到：

$$s(X_1, Y_1, Z_1, \cdots) \barwedge s(X_2, Y_2, Z_2, \cdots).$$

但是上面所說的兩个面束有三对重合的对应元素，就是下列

的平面对重合:

$$平面\ sX_1 \equiv 平面\ sX_2 \equiv 平面\ su,$$
$$平面\ sY_1 \equiv 平面\ sY_2 \equiv 平面\ su_1,$$
$$平面\ sZ_1 \equiv 平面\ sZ_2 \equiv 平面\ su_2.$$

因此，由斯陶特定理可以推得其餘的对应平面对也应該重合。任意母線 u_i 与直線 s_1 和 s_2 交於射影點列的对应點。用字母 U_1 和 U_2 來表示这些对应點。於是，按已經証得的結果，平面 sU_1 和 sU_2 应該重合，因此直線 u_i 与直線 s 相交。

这样，直線 s 与直紋曲面的所有母線都相交並且它的所有點就都是曲面的點。

变動直線 s，使它在自身的任何位置恆与曲面的三条固定母線 u, u_1, u_2 相交。这時，像上面所說明的，直線 s 的所有點都在曲面上，並且与曲面的所有母線相交。

因此可以說，变動直線 s 我們就得到直紋曲面的第二組母線。

我們來証明第二組母線 (s) 与第一組的每兩条母線（例如 u_1 和 u_2）相交於射影點列的对应點。假定，第二組母線 (s) 分別与直線 u 相交於點 $X, X_1, X_2, \cdots$，与直線 u_1 相交於點 $Y, Y_1, Y_2, \cdots$，与直線 u_2 相交於點 $Z, Z_1, Z_2, \cdots$。把點列 $X, X_1, X_2, \cdots$ 投射成有軸 u_1 和 u_2 的兩个面束。这時我們得到:

$$點列(X, X_1, X_2, \cdots) \barwedge 面束\ u_1(u_1X, u_1X_1, u_1X_2, \cdots),$$
$$點列(X, X_1, X_2, \cdots) \barwedge 面束\ u_2(u_2X, u_2X_1, u_2X_2, \cdots).$$

由此可見，面束 u_1 和 u_2 是射影的。

另一方面，平面 $u_1X, u_1X_1, u_1X_2, \cdots$ 分別与直線 u_2 交於點 $Z, Z_1, Z_2, \cdots$。因此有:

$$點列(Z, Z_1, Z_2, \cdots) \barwedge 面束\ u_1(u_1X, u_1X_1, u_1X_2, \cdots),$$

同样

$$點列(Y, Y_1, Y_2, \cdots) \barwedge 面束\ u_2(u_2X, u_1X_1, u_2X_2, \cdots).$$

由此推得點列$(Y, Y_1, Y_2, \cdots)$和$(Z, Z_1, Z_2, \cdots)$是射影的。

因此，兩組母線在它們所屬的直紋曲面的射影構成的意义上，起着同样的作用。

剛才所作的討論給予我們一种構成二次直紋曲面的新方法：

設有不相交的任意三条直線 u, u_1, u_2 固定这些直線，並且研究動直線 s，这条直線在移動中的任何位置常与三条固定直線相交。这時動直線 s 画出二次直紋曲面

再回到二次直紋曲面母線的問題上，我們可以証明，同一組的任意兩条母線可以作为確定已知直紋曲面的射影面束的軸。

事实上，一組的任意兩条母線不相交，但是与另一組的所有母線都相交。後一組母線与已知兩条母線交於射影點列的对应點。由此可知，已知兩条母線是確定所研究的二次直紋曲面的兩个射影面束的軸。

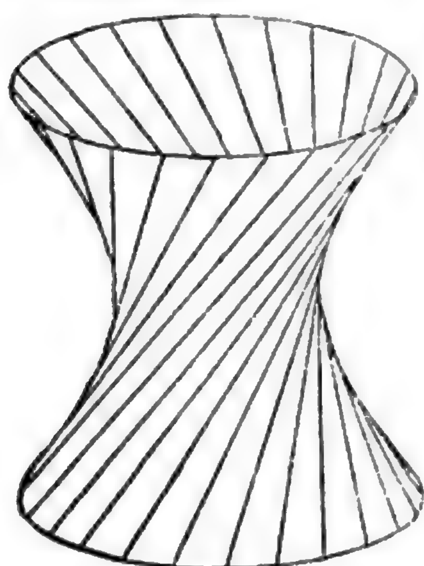
其次，从二次曲面母線的性質推出：

通过曲面的每个點有每組的一条母線。

譬如，按二次直紋曲面的定义，它的每个點M屬於第一組母線(例如，u_i)。假設这条母線的點M对应在同一組的某条其他母線(例如，u_k)上的點M'(在第二組母線在母線u_i和u_k上所建立的射影对应裏)。於是，直線MM'就是第二組的母線(証完)。

4. 我們已經知道任意平面 ω 与二次直紋曲面相交成二次曲線。如果平面ω还通过曲面的一条母線，則它还要包含另一組的一条母線（就是第二个面束裏和它对应的平面与它相交所決定的那条母線)。所以，在这种情形下二次曲線分解为一对直線。在这种情形下，我們把平面ω叫做切面。

从二次直紋曲面的仿射性質来看，二次直紋曲面可以分成兩類。非固有平面是截面的那种曲面叫做單葉双曲面(圖 223)。与非固有平面相切的那种曲面叫做双曲拋物面(圖 224)。


圖 223.

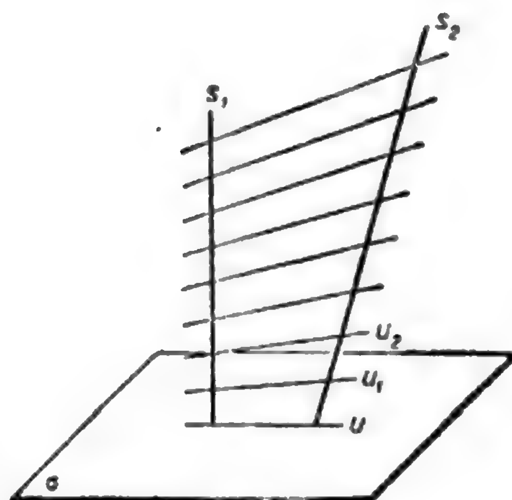


圖 224.

在双曲拋物面的情形，作为切面的非固有平面与曲面相交於不同組的兩条母線。我們用 u_∞ 和 s_∞ 來表示这兩条母線。一組的所有母線都与直線 u_∞ 相交，同時另一組的母線都与直線 s_∞ 相交。这就是說，第一組的所有母線平行於通过 u_∞ 的同一个平面。完全同样第二組的所有母線平行於通过 s_∞ 的同一个平面。我們常利用双曲拋物面母線的这个性質來作它的模型。

如果 s_1 和 s_2 是不平行於平面 σ 的兩条交叉直線（也不在平面 σ 上，圖 224），則可以用直線 s_1 和 s_2 作为一組的母線。与直線 s_1 和 s_2 都相交並且与平面 σ 平行的直線 $u, u_1, u_2, \cdots$ 可以看作是另一組母線。不难看出，第二組的母線 u 是和三条固定直線（s_1, s_2 和平面 σ 的非固有直線）相交的直線。

要做双曲拋物面，也可以利用四面体 $ABCD$（圖 225）。

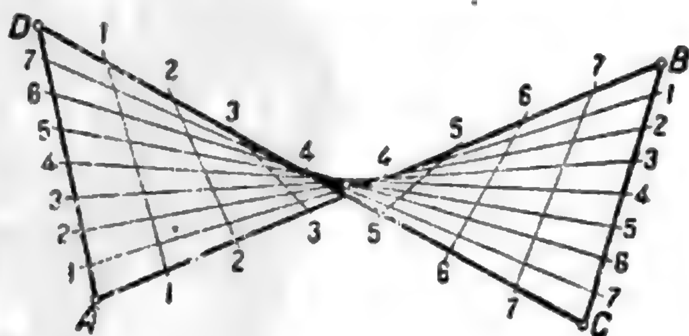


圖 225.

事实上，把四

面体的相对稜 AB 和 CD 分成等数个部分，用直線联接对应分點。我們得到的直線 11, 22, 33, 44, 55, … 就是一組母線。这是由於所有这些直線平行於与直線 AD 和 BC 平行的平面 σ。完全同样，利用四面体的相对稜 AD 和 BC，可以作出第二組母線，这些母線平行於与直線 AB 和 CD 平行的平面 σ'❶。

§ 65. 用兩个異素对应的把構成二次曲面

在第五章裏曾經研究过關於場的同素对应及異素对应的問題。點与直線的場对偶地对应平面与直線的把。因此類似於場的射影对应，我們可以研究平面与直線的把的同素对应及異素对应。在这一節裏我們將要說明从兩个把的異素对应導至二次曲面的構成。在兩个把的情形下，它們的異素对应可以敍述成下面的样子：

1°. 第一个把的每个平面对应第二个把的一条直線，而第二个把的每个平面对应第一把的一条直線。

2°. 一个把的接合元素对，对应另一个把的接合元素对。

在把的異素对应裏，也像場的異素对应一样，任意兩个对应的一次圖形是射影形。

假定我們有兩个異素对应的把，它們的中心是 S 和 S'。於是一个把的每个平面对应另一个把的一条直線。

我們來研究屬於把 S 和 S' 中一个的平面与它所对应的直線交點的軌跡。

首先注意，这个軌跡可以用兩种方法作出：

1）可以研究把 S 的平面与它在把 S' 裏的对应直線的交點。

2）可以研究把 S 的直線与它在把 S' 裏的对应平面的交點。

我們來証明，在这兩种情形下，我們得到的是同一个軌跡。

❶ 建議讀者當作習題來研究用这种方法从已知四面体可以得到幾個不同的直紋拋物面。

事实上，假定第一个把的平面 α 对应第二个把的直線 a'。用 A 表示它們的交點(圖 226)。直線 SA 是第一个把的射線，我們用字母 a 來表它。在第二个把裏对应射線 a 的平面用字母 α' 表示。因为射線 a 屬於平面 α，所以平面 α' 屬於射線 a'。因此，α' 通过點 A 並且与射線 a 相交於这个點。

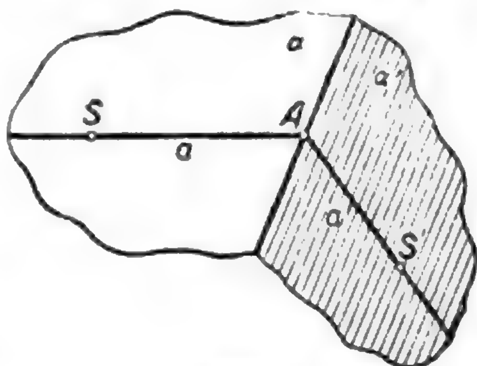


圖 226.

如此，利用第一种作法所得到的任何點 $A(A=\alpha\times a')$，用第二种作法($A=a\times\alpha'$)也可以得到(証完)。

現在我們回來証明所研究軌跡的以下主要性質：

1°. 屬於把 S 或 S' 的每个平面与这个軌跡相交成二次曲線。

2°. 每条直線与这个軌跡的交點不多於兩个。

首先証明第一个命題。假定在这裏所指的是屬於把 S 的平面 α(圖 227)。因为軌跡的所有點可能由第二种方法(第一个把的直線与它在第二个把裏的对应平面)得到，所以平面 α 上的點可以当作是在平面 α 上的第一个把的直線与第二个把裏的对应平面的交點而得到的。但是，所說的直線在平面 α 上構成以點 S 为中心的線束。假設平面 α 对应与它交於點 A 的射線 a'。於是在

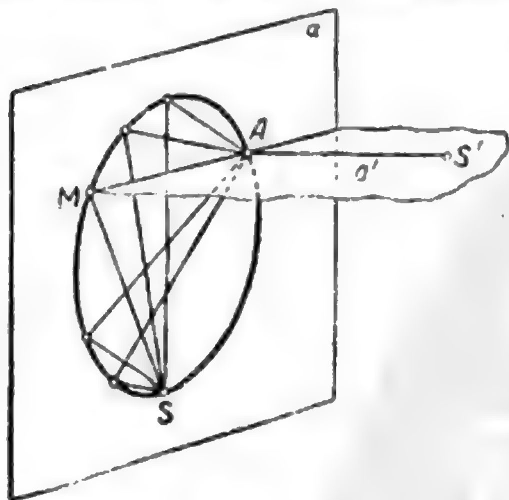


圖 227.

平面 α 上的線束 S 对应通过直線 a' 的面束。这兩个对应的一次圖形是射影的。但是面束 a' 与平面 α 相交於和面束透視的線束 A。因此平面 α 上的線束 A 和 S 是射影的，並且它們的对应射線 (AM

和 SM)的交點 M 構成一个二次曲線。这个曲線顯然就是所研究的軌跡在平面 α 上的截影。

第二个命題很容易从第一个導出來。事实上，如果 g 是任意直線，則通过这条直線与把中心 S 的平面 ω 与軌跡相交成二次曲線 k。因为直線 g 在这个平面上，它与曲線 k 的公共點不能多於兩个，於是第二个命題被証明。

这裏所導出的所研究的軌跡性質給予我們把它叫做二次曲面的根据。

上面我們断定了屬於一个把的平面 α 与二次曲面相交成一个二次曲線 k。特殊情形可以选取平面 α 使它对应直線 $a'\equiv S'S$。这時點 A 与點 S 重合，我們就得到有公共中心 S 的兩个線束。这兩个線束的二重射線顯然是屬於二次曲面。二重射線可能是兩条(双曲型对应)，一条(抛物型对应)，或者一条也沒有(橢圓型对应)。因此，在这种情形下，平面 α 叫做切面，它与二次曲面可能有兩条公共直線，一条公共直線，或是一个公共點 S。

通过每个構成軌跡的把的中心可以作唯一的切面。我們已經確定它是一个把裏的平面，如果將兩个把的公共射線看作屬於另一个把時那麼它就是这条射線的对应平面。用字母 σ 表示通过點 S 的切面(圖 228)。过 S 引任意直線 a。这条直線与二次曲面有一个公共點 S，因此它与曲面只能再有一个公共點。这样的點顯然是已知直線 a 与它的对应平面 α' 的交點 A。在平面 α' 通过 S，或者平面 α' 通过把的公共射線 SS' 的情形下，也只有在这样情形

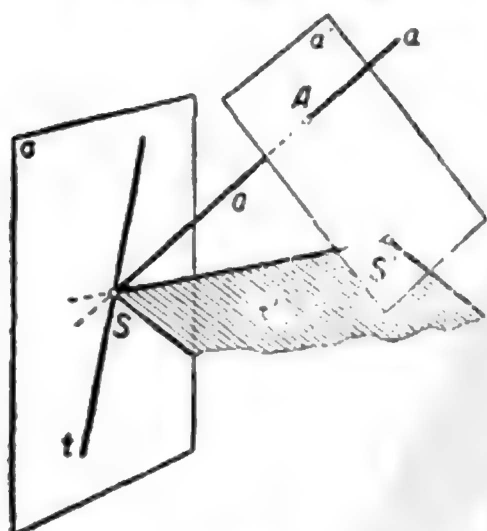


圖 228.

下，第二个點 A 与第一个點 S 重合。但这時在第一个把裏它的对应直線 a 应該在切面 σ 上。由此我們推得：

通过 S 並且在切面 σ 上的每条直線 t 与二次曲面沒有另外(除 S 以外)的交點。这样的直線叫做二次曲面的切線。

在圖 228 裏，切線 t 对应通过把的公共射線 SS' 的平面 τ'。因此，切面 σ 是通过點 S 的切線 t 的軌跡。點 S 叫切點。

如果平面 τ' 通过对应的切線 t，則 t 整个屬於二次曲面。如果对於面束 (SS') 的每个平面 (τ') 都存在这种情形，也就是如果通过直線 SS' 的面束和对应的切線束 (t) 透視，則切線束(也就是平面 σ)屬於二次曲面。將切線与通过它的平面歸於第一个把，我們發現面束 (SS') 的平面应該通过它所对应的在點 S' 的切線。因此，通过點 S' 的切面 σ' 也屬於二次曲面。不難看出，在这种情形下，这个二次曲面分解为兩个平面 σ 和 σ'。曲面不能有另外的點，这是由於曲面的每个點 A 必在

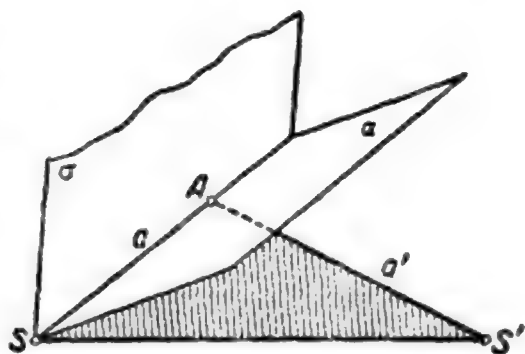


圖 229.

与切線 a 相对应的平面 SAS' 上(圖229)。因此，直線 $S'A \equiv a'$ 对应通过 a 並且 a' 交於直線 a 上一點 A 的平面 α(証完)。

这样，二次曲面分解成一对平面 σ 和 σ'。

二次曲面射影構成的簡述就結束到这裏。这种曲面射影理論的進一步開展与相应的二次曲線理論有許多地方類似。特別是可以証明：二次曲面的任意兩个點都可以作構成曲面的把的中心。由此可知，曲面在它的每个點都有切面，並且任意平面与二次曲面只能相交成二次曲線，这个二次曲線还可能分解成一对直線(是切面的情形)。

其次可以提出二次曲面的对偶形（平面的軌跡）問題以及它的利用兩个場的射影構成❶。

習 題

1. 已知平面 ω 与 ω' 成透視同素对应，其中一个平面上与第二个平面上非固有直線相对应的直線叫做**极限直線**。怎样能找出平面 ω 和 ω' 上极限直線的位置？

2. 試証下面命題的正確性：

如果透視同素对应的平面 ω 和 ω' 中的一个繞平面的交線旋轉，則平面的同素对应仍然是透視的。

3. 如果使兩个平面中的一个繞它們的交線旋轉，則透視同素对应的中心 S 在空間移動。試証中心 S 画出一个圓，这圓的中心在一条确定直線上。

4. 已知透射的中心，軸与一对对应點，試作已知非固有點的对应點（非固有點由通过它的任意直線确定）。

5. 叠置場的透射由軸 s，中心 S 与对应點对 A, A' 确定。試作平面的非固有直線所对应的直線（把非固有直線看作是一个特殊直線）。这样的直線叫做**极限直線**。可以預先找出它的位置嗎？

6. 已知透射的中心，軸与一条极限直線（研究兩种情形）。試作已知點 M 的对应點 M'。

7. 已知透射的中心，軸与对应點对 A, A'，在直線 AA' 上已知一个點 M。試作它的对应點 M'。

8. 已知透射的中心 S 与兩条极限直線，試作它的軸与一对对应點。

9. 試証在对合透射裏对应點对 A, A' 調和分隔透射中心和它的軸与直線 AA' 的交點。

10. 中心在軸上的透射由軸与对应點对 A, A' 确定。試求已知點 B 的对应點 B'。再作直線 AA' 上非固有點的对应點。

11. 試証座标三角形頂點与單位點的齐次射影座标可以表示成下面的形狀：$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ 和 $(1, 1, 1)$。

12. 試寫出座标三角形各边以及通过一个頂點的任意直線的齐次射影座标方程式。

13. 用兩个透射三角形中的一个作为座标三角形，透射中心作为單位點，給出平面笛沙格定理的解析的証明。

---

❶ 我們不再深入研究这些有趣的問題，並向希望更詳細了解它的一些讀者介紹瑞耶(Th. Reye)著的位置幾何学第二章28—40頁。

14．試寫出通过座标三角形頂點的二次曲線的齐次射影座标方程式。

答：$ayz+bzx+cxy=0$。

15．試寫出將座标三角形 XYZ 的頂點与单位點 E 分别变为點 Y，Z，E 和 X 的同素变换公式。

16．場的同素换变含笛卡兒座标的表示式为：

$$x=\frac{2x'+y'-1}{x'+y'+1},\qquad y=\frac{x'-y'+5}{x'+y'+1}.$$

試寫出和座标軸与平面的非固有直線 XY 对应的直線方程式。再寫出逆变换的公式。

17．試寫出（用笛卡兒座标）將單位正方形 $O(0,0)$，$E_1(1,0)$，$E(1,1)$，$E_2(0,1)$ 变为菱形 $O'(0,0)$，$E_1'(4,1)$，$E'(0,2)$，$E_2'(-4,1)$ 的同素变换公式。

18．叠置場的同素对应由二重點 X 与两个对应三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 給定。試作与二重點 X 關联的二重直線 x。

19．叠置場的同素对应由二重直線 x 与两个对应三边形 abc 和 $a'b'c'$ 給定。試作与二重直線 x 關联的二重點 X。

20．已知叠置場的同素对应由習題 18 的条件給定。对於已知點 M 試求（作）它的对应點 M'。

21．已知叠置場的同素对应由習題 19 的条件給定。对於已知直線 m 試作它的对应直線 m'。

22．叠置場的同素对应被两个对应四角形確定。已知一条直線 g。試在这条直線上求出同素对应的一对对应點。

23．場到它自身的同素变换被两个对应四边形確定。已知一个點 G。試作通过这个點的一对对应直線。

24．試証極三角形 PQR 的三个頂點中，有两个頂點在基礎二次曲線 k 的外部，一个頂點在它的內部。

25．已知極三角形的一个頂點与通过它的一个边。假定基礎二次曲線已經画出。試作这个極三角形。

26．已知由 P 點引出的两条直線与二次曲線 k 的四个交點。二次曲線其餘的點是未知的。試作點 P 的極線。

27．已知（已画出）一个圓与它外部的一个點。試用一根直尺作通过已知點到圓的切線。

28．已知二次曲線內部的一个點 P，試作被點 P 所平分的弦。

提示　所求直線通过點 P 的極線上的非固有點。

29．已知二次曲線 k 上的四个點 A，B，C，D。曲線 k 在这些點的切線構成一个外切四角形。試証外切四角形对边交點与內接四角形 $ABCD$ 对边交點所在的直線，是

这兩个四角形对角線所通过的點的極線。

30. 已知从點P和Q到二次曲線k的兩对切線。曲線k未給出。試作直線PQ的極點。

31. 任意三角形ABC內接於二次曲線。在點A, B和C的切線構成曲線的外切三角形$A'B'C'$。联結內接三角形頂點与任意點S的直線AS, BS, CS与三角形ABC的对边交於點A_1, B_1和C_1。

試証三条直線$A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$交於一个點。

提示 按笛沙格定理，三角形ABC和$A_1B_1C_1$的对应边交於在一条直線上的三个點A_0, B_0和C_0。直線$A'A_1$, $B'B_1$, 和$C'C_1$是點A_0, B_0和C_0的極線[西里可維奇(Э. Хильkевичем, тюмень)提出的問題]。

32. 已知决定場的配極变换的圓。試証基礎圓的中心是任意極三角形的垂心。

33. 使場变成为自身的異素变换，其定义为对於已知圓的配極变换，更繼以对於已知圓心的點对称变换。証明这样的異素变换是配極变换。怎样說明所敍述的配極变换(所謂"反配極变换")的基礎曲線?

34. 試証在反配極变换中(参考上題)有等边的極三角形。試用已知圓的半徑確定它的面積。

35. 已知(已画出)基礎二次曲線k与極三角形PQR，以及与極三角形的边交於點A, B和C的直線g。將A, B和C看作是曲線k在極三角形各边上所確定的共軛點对合裏的已知點，試作它們的对应點。

36. 已知(已画出)基礎二次曲線k与極三角形PQR以及一个點G。GP, GQ和GR是曲線k在具有中心P, Q和R的線束裏所確定的对合的已知直線。試作它們的对应直線。

第六章 射影幾何、仿射幾何、度量幾何以及它們的羣

§66. 緒言

普通歐幾里得空間的度量幾何是中学教学的对象。在我們的教程的開始我們曾經在初等幾何的基礎上，而且不超出歐幾里得空間的範圍，研究过幾何圖形的仿射性質。这些性質總起來構成所謂仿射幾何，就是本書第一章所講的。

为了研究圖形的射影性質，我們發現必須在歐幾里得空間裏添加非固有元素而建設新的射影空間。在这种空間裏我們曾經開展了平面射影幾何的基本事項。

圖形的射影性質，曾被看作是關於平面到它自身的所有同素变換的不变性質。那時說明过仿射变換不过是同素变換的一种特殊情形，它將非固有直線仍变为非固有直線。下面將要証明，若在射影平面上劃分出某些特殊元素（非固有直線与它上面的絕对对合），則圖形的度量性質也可以歸到射影性質裏。

这样的射影观點使我們能够以一般射影形式作出平面仿射幾何与度量幾何。也就是完全不依賴我們所研究的射影平面（添加非固有直線的歐幾里得平面）的特殊性。由於这个緣故，幾何系統的比較与圖形的射影、仿射以及度量性質的明確區分，就变为可能了。

無疑地，所有这些对於中学數学教師都有很大的意义。另一方面，用这种最一般的观點來研究初等度量幾何的問題總是有某些困难而要求像我們对於平面幾何那样要作足够的敍述。

在 §77 裏給出空間幾何系統的射影發展的簡述。

§67. 射影幾何和它的羣

在前幾章裏我們敍述过平面射影幾何的基本概念与事项。我們曾經提到，射影性質应該理解为在平面到它自身的所有同素变換下保持不变的圖形性質。我們来証明場的所有同素变換的集合構成一个羣。滿足下面所說条件的場的变換集合叫做羣。下面說明这些条件，同時我們再証明同素变換集合滿足这些条件，因而它構成羣。

1°. 集合的任意兩个变換的積还是这个集合裏的变換。

我們來証明，場到它自身的所有同素变換的集合滿足这个条件。用字母 K 表示任意一个同素变換，用 {K} 表示場的所有同素变換的集合。我們要証明，

$$K'\cdot K''=K'''.$$

事实上，同素变換 K′ 把每个點 A 变为點 A'，每条直線 a 变为直線 a'，这時元素的接合關係保持不变。同素变換 K″ 把點 A' 变为點 A''，直線 a' 变为直線 a''，同样元素的接合關係也保持不变。由此我們断定，兩个同素变換的積 (K′·K″) 是把每个點 (A) 变为點(A'')，每条直線(a)变为直線(a'')，並且保持元素間接合關係的变換。

所以这个合成变換 K‴ 也是同素变換。

2°. 集合裏变換的積滿足結合法則，也就是

$$(K'\cdot K'')\cdot K'''=K'\cdot(K''\cdot K''').$$

我們來証明所有同素变換的集合滿足这个要求。譬如，如果同素变換 K′ 把點 A 变为點 A'，同素变換 K″ 把點 A' 变为點 A''，而同素变換 K‴ 把點 A'' 变为點 A'''，則上面所寫的公式左边可以表示以折線 $AA''A'''$，同時右边可以表示以折線 $AA'A'''$(圖 230)。顯

然，在这兩种情形下，我們得到把點 A 变为點 A''' 的同一个合成变换。

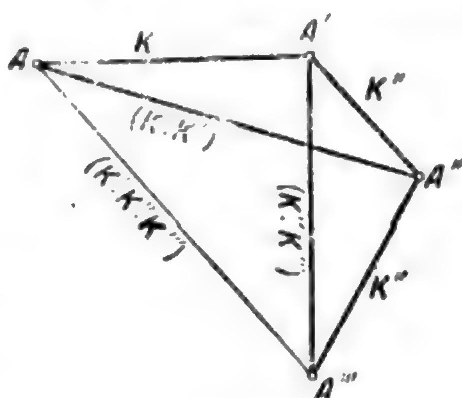


圖 230.

3°. 集合的变换裏含有恆等变换。

假定，場的每个點与每条直線都变为它自身，也就是場的所有元素保持不動。这样的变换叫做恆等变换。顯然，它可以看做是同素变换，因为在这个变换裏點对應點，直線对應直線，而且接合元素变为接合元素。

4°. 对於集合的每个变换總存在它的逆变换，也屬於这个集合。这样兩个变换的積是恆等变换。

假定，同素变换 K 把場 ω 变为場 ω'。我們來研究把場 ω' 变为 ω 的逆变换。这个变换也是同素变换。我們用 K^{-1} 來表示它。如果实行变换 K，然後再实行变换 K^{-1}，則將有恆等变换，因为場的所有元素变为它自身。

我們應有下面的符号等式：

$$K \cdot K^{-1} = 1.$$

因为所有同素变换的集合 {K} 滿足条件 1°, 2°, 3° 和 4°，所以它構成一个羣。这个羣 {K} 命名为射影幾何的羣。

我們已經知道，射影幾何是研究在羣的所有变换下保持不变的圖形性質。

在第二章到第五章裏，曾經叙述过射影幾何的基本概念与定理。特别是，在第四章裏建立了二次曲線的射影理論。这样，我們就很詳細地熟悉了这个学科的内容。現在我們來看一看对於射影幾何來說，仿射幾何以及它的羣佔有怎样地位。

§ 68. 仿射幾何和它的羣

1. 除掉在場的任意同素变換下保持不变的圖形的射影性質以外，我們还可以研究只是在羣{K}的某些同素变換下保持不变的幾何圖形性質。

譬如，只是在仿射同素变換下保持不变的圖形性質叫做圖形的仿射性質。回想(§ 50)，非固有直線变为它自身❶的同素变換叫做仿射同素变換。因此，圖形的仿射性質与非固有直線的特殊作用有關。我們知道，按射影的观點所有的直線完全是平等的。因此，無論平面的哪一条直線都可以叫做非固有直線。选取場的某条直線作为"非固有直線"❷，我們轉到仿射幾何的結構上。为了这个目的，我們來研究把固定的"非固有"直線变为它自身的同素变換。这样的同素变換我們叫做仿射同素变換。不难断定，仿射同素变換的集合構成羣{A}，它是所有同素变換的集合{K}的从屬羣❸。为此，只要証明集合{A}滿足§ 67 裏所敍述的四个条件就够了。

我們來研究条件 1°(§ 67)。設 A′ 和 A″ 是場的某兩个仿射同素变換。証明

$$A' \cdot A'' = A''',$$

这裏 A‴ 也是仿射同素变換。事实上，A‴ 是同素变換，因为 A‴ 是兩个同素变換 A′ 和 A″ 的積。後面的兩个同素变換都把"非固有"直線变为它自身，因此，在合成变換 A‴ 裏"非固有"直線也变为它自身。所以变換 A‴ 是仿射的。至於条件 2°，3° 和 4°，則可以像 § 67 裏所作的論証那样完全不变地对於仿射同素变換重敍

❶ 因为我們所研究場的同素变換是在同一个底上，所以在仿射同素变換裏，非固有直線变为它自身。

❷ 对"非固有"直線的这种最廣义的理解，我們用引号标出"非固有"的字样。

❸ 也就是变換集合{A}是集合{K}的一部分，並且集合{A}也構成羣。

述出來。

这样，我們就断定，仿射同素变换的集合構成羣。这个羣 {A} 叫做**仿射幾何的羣**。

仿射幾何研究在所有仿射同素变換下保持不变的那些幾何圖形性質，但这些性質不是射影性質，也就是，在所有的变换 {K} 裏还有破坏仿射性質的那样变換。

2. 我們已經知道仿射幾何的重要概念与性質，这些曾經在第一章以及後來的 § 50 和 § 51 裏(用射影形式)闡明过。

仿射幾何射影的說明使我們可以在射影平面上用一般形式(也就是取任意直線作为"非固有"直線)实现它的結構。

假定直線 u (圖231)是場的"非固有"直線。在这种情形下，这条直線的每个點都是"非固有"點。如果直線 a 和 b 相交於直線 u 上的點 M_u，我們就应該把这样的直線叫做"平行"直線，因为它們交於"非固有"點 M_u。在仿射同素变換裏，直線 u 变为它自身，因此點 M_u 对应同一条直線上的點 M_u'。直線 a 和 b 变为直線 a' 和 b'。直線 a' 和 b' 是"平行"直線，因为它們交於"非固有"點 M_u'。因此，如果直線 a 和 b 是"平行的"，则对应直線 a' 和 b' 也是"平行的"。平行性是關於所有仿射同素变換的羣 {A} 不变的概念，这是仿射幾何的概念。

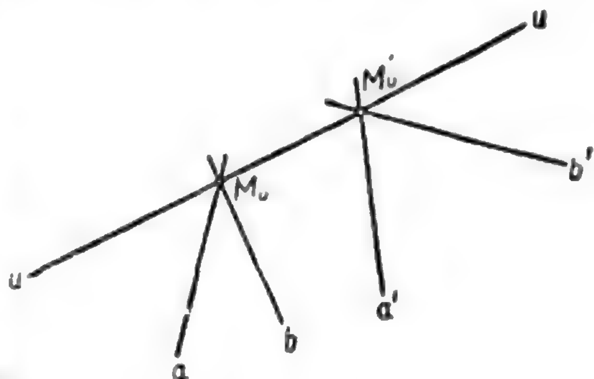


圖 231.

完全同样，我們也可以把直線上三个點的簡單比变为这样最普遍的概念。三个點的簡單比的射影定义我們曾在 § 25 的末尾得到过。也就是在这一節裏我們曾証明

$$(ABC)=(ABCD_{\infty}),$$

这裏 D_{∞} 是直線 ABC 的非固有點。换句話說，直線上三个點 A, B, C 的簡單比可以用三个已知點再加上直線 ABC 的非固有點 D_{∞} 这样四个點的交叉比來定义。

假定，取直線 u 作为"非固有"直線(圖 232)。这時，我們用下面的形式來定义三个點的簡單比 (ABC)：

$$(ABC)=(ABCD_u),$$

这裏點 D_u 是直線 ABC 的"非固有"點。

在仿射同素变換裏直線 u 变为它自身。因此直線 s 的"非固有"點 D_u 对应直線 s' 的"非固有"點 D_u'。因为在每个同素变換下，四个點的交叉比不变，所以就有：

$$(ABCD_u)=(A'B'C'D_u').$$

但是，根据所確立的定义，

$$(ABC)=(ABCD_u),$$

$$(A'B'C')=(A'B'C'D_u').$$

因此有： $$(ABC)=(A'B'C'),$$

也就是直線上三个點的"簡單比"關於所有仿射同素变換是不变的。所以这个概念也屬於仿射幾何。

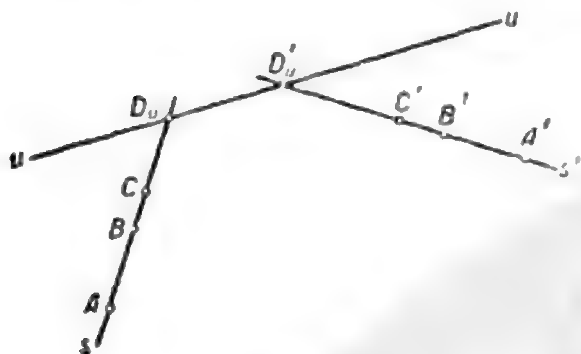


圖 232.

应該注意，線段的平分是当分點与已知直線的非固有點調和共軛的特殊情形。因此在圖 232 裏，如果點对 B, D_u 調和分隔點对 A, C，則點 B "平分"線段 AC。这样，我們就可以用最普遍的射影形式(就是利用平面的任意直線作为"非固有"直線)開展仿射幾何。

§ 69. 二次曲線的仿射性質

1. 我們注意二次曲線与非固有直線有關的那些性質。首先根据二次曲線与非固有直線的相關位置把二次曲線區分为双曲線、拋物線与橢圓。就是有兩个不同的非固有點，也就是与非固有直線相交於兩个实點的二次曲線叫做**双曲線**。有一个非固有點，或者說与非固有直線相交於重合的兩个點的二次曲線叫做**拋物線**。所以拋物線与非固有直線相切。沒有非固有點，或者說与非固有直線沒有公共點的二次曲線叫做**橢圓**。也可以說，橢圓与非固有直線交於兩个虛點，就是橢圓在非固有直線上所確定橢圓对合的虛二重點(§ 59)。

我們回到普通射影形式的仿射幾何。像我們屢次所做的那样，假定取任意直線 u 作为"非固有"直線。在这种情形下，我們还可以保留二次曲線的仿射分類法(圖 233)。譬如，如果二次曲線 k_1

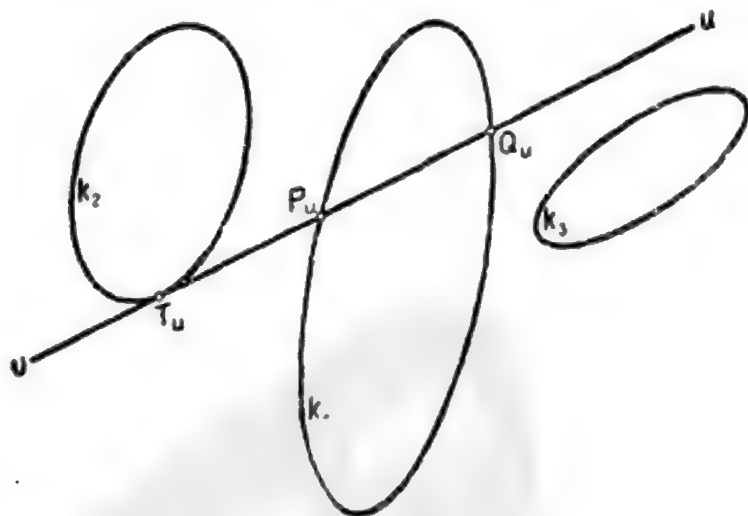


圖 233.

与"非固有"直線 u 交於點 P_u 和 Q_u，則应該把它歸到"双曲線"裏。曲線 k_2 与直線 u 切於點 T_u，就歸到"拋物線"裏。最後，曲線 k_3 与

直線 u 沒有公共點，就把它歸到"橢圓"裏

这样的分類在仿射幾何裏是不变的。事实上，任意仿射同素变換把"非固有"直線变为它自身，因此，与"非固有"直線有兩个交點的二次曲線也变为与"非固有"直線有兩个交點的二次曲線。换句話說，"双曲線"總变为"双曲線"。同样，"拋物線"只能变为"拋物線"，"橢圓"只能变为"橢圓"。所以在仿射变換裏，曲線的这样分類不受任何改变。。

另一方面，我們不难看出，相反地在射影幾何裏这样的分類是沒有意义的，因为存在有同素变換，它能把橢圓变为双曲線或拋物線❶。这就說明射影幾何並不區分二次曲線的形狀。所有这些形狀都是射影恆等的。

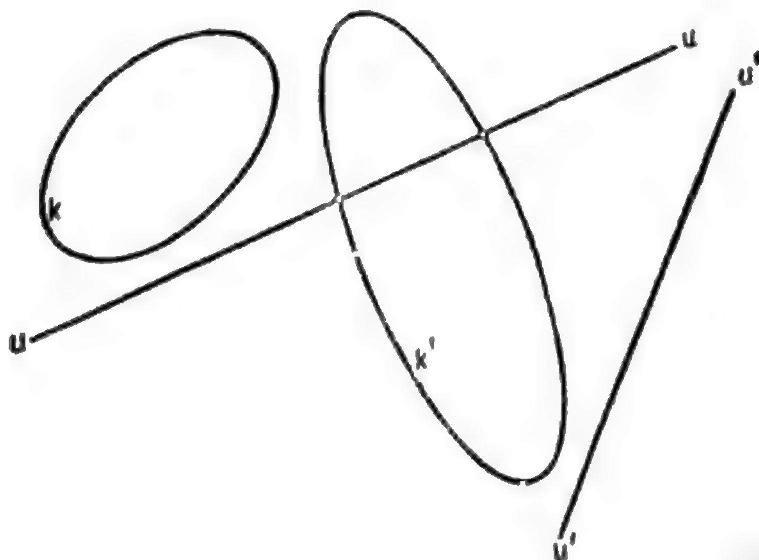


圖 234.

作为說明的实例，我們引進下面的想法。假定某个同素变換 K 把二次曲線 k 变为 k'（圖 234）。引直線 u 使它不与曲線 k 相交

❶ 如果關於作为"非固有"直線的某条直線 u 建立这样的分類，顯然，沒有"非固有"直線，这样分類是不可能的。

而与曲線 k' 相交。再以直線 u 作为非固有直線，於是根据前面所建立的分類法，曲線 k 是"橢圓"同時曲線 k' 是"双曲線"。这样就說明同素变換 K 能把"橢圓" k 变为"双曲線" k'。

2. 下面是許多与非固有直線有關的二次曲線理論問題，也就是有關中心与直徑（特別是共軛直徑）的研究。

我們用射影的观點來研究这些概念。

如果有一个有中心二次曲線 k（也就是，中心是平面上固有點的曲線），則曲線的中心 O 可以定义为平分經过它的所有弦的點（圖 235）。这就是說，中心 O 是通过中心的每条割線上的非固有點關於它与曲線 k 交點的調和共軛點。譬如，对於割線 AB 有：

$$(ABOP_{\infty})=-1.$$

完全同样，对於割線 CD

$$(CDOQ_{\infty})=-1$$

对於通过中心 O 的每条割線都是这样。

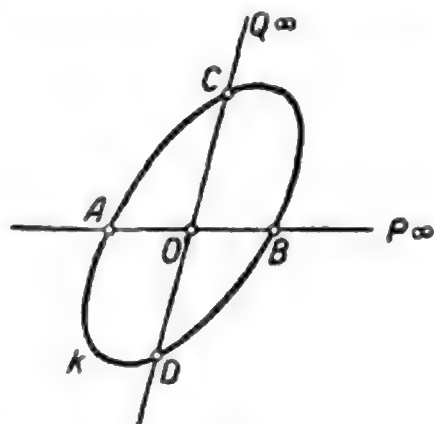


圖 235.

但这就是說，非固有直線是中心 O 的極線，因为它是點 O 關於割線与曲線 k 交點的第四調和點的軌跡。

这样，在射影的观點下，就可以把非固有直線的極點定义为二次曲線的中心。

应用这个定义，我們可以得到下面的結論，这些結論是在具有任意取的"非固有"直線的仿射幾何裏說明的。这能使它們成为很直观的。

在"橢圓"的情形下，二次曲線（k_1）与"非固有"直線 u 沒有公共點（圖 236 a）。因此"中心" O 是橢圓內部的點。事实上，如果通过點 O 能引曲線 k_1 的切線，則它的切點將屬於點 O 的極線，也就

是"非固有"直線 u，这与所作的假定矛盾。

在"拋物線"的情形下，曲線 (k_2) 切於"非固有"直線 u（圖 236 б）。直線 u 的極點是它与"拋物線"的切點 O_u。所以拋物線的中心是"非固有"點 O_u。

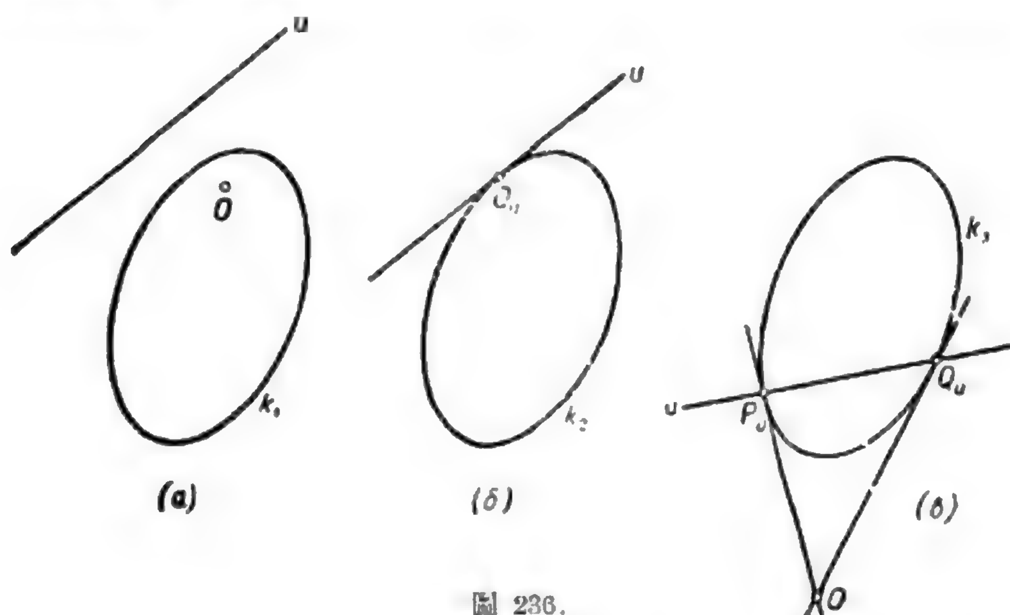


圖 236.

最後，如果二次曲線 (k_3) 与"非固有"直線 u 相交，則是"双曲線"的情形。过曲線 k_3 与直線 u 的交點 Pu 和 Qu 作曲線的切線，求得直線 u 的極點 O。按定义，點 O 就是"双曲線"的"中心"。过"非固有"點 Pu 和 Qu 的切線叫做"漸近線"。"双曲線"的中心 O 顯然是它外部的點（圖 236 в）。

对於所有的仿射同素变換，二次曲線的"中心"变为对应曲線的"中心"。这从下面的理由就可以看出。

極點与極線是和二次曲線的射影結構有關的，这种結構在所有同素变換下保持不变。因此，**在同素变換下關於二次曲線 k 的極點与極線变为關於对应曲線 k' 的極點与極線**。

二次曲線的"中心"是"非固有"直線的極點。任何仿射同素变換都把"非固有"直線变換为它自身。設曲線 k 的"中心" O 在仿射

变换下对应點 O'。因为點 O 是直線 u 關於 k 的極點，所以點 O' 应該是直線 u' 關於对应曲線 k' 的極點。但是，直線 u' 与 u 重合。因此 O' 是"非固有"直線的極點，也就是二次曲線 k' 的"中心"。

總之，二次曲線中心的概念应該是与仿射幾何相關联的概念。

3. 在 §59 裏我們曾經利用配極对应建立了共軛點与共軛直線的概念。

共軛(配極)的概念是射影的概念。但是，如果这个概念与非固有直線相關联，那末它就屬於仿射幾何。譬如，在 §59 裏我們所研究的直線上以及線束裏共軛元素的对合。取二次曲線的中心 O 作为線束的中心。这時線束 O 的射線是二次曲線的直徑。共軛的概念就可以移到曲線的直徑上。也就是，如果兩个直徑，其中每一个通过另一个的極點，則这兩个直徑叫做共軛直徑。

因为二次曲線的中心是非固有直線的極點，所以直徑的極點在非固有直線上，也就是任何直徑的極點都是非固有點。

假定取直線 u 作为平面的"非固有"直線，並且點 O 是二次曲線 k 的中心(圖 237)。於是"直徑" d 的極點 D_u 可以利用通过这个"直徑"端點 A 和 B 的切線作出。因为切線 a 和 b 交於非固有點 D_u，所以它們是"平行的"。因此有：

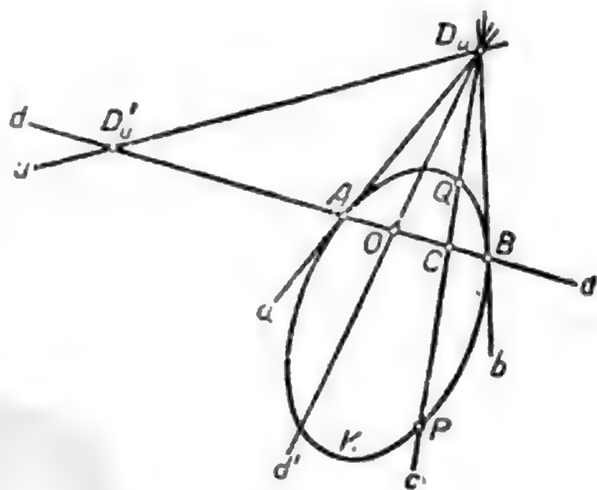


圖 237.

过二次曲線的任意"直徑"端點的切線是"平行的"。

根据定义，通过"直徑" d 的極點 D_u 的"直徑" d' 是"直徑" d 的共軛"直徑"。因此，共軛"直徑" d' 与过已知"直徑"端點的切線

"平行"。引"平行於"共軛"直徑"d'的任意割線c，这就是說，割線c通过點D_u。但是已知直徑d是點D_u的極線，因此割線c与曲線k的交點P和Q被點Du和C調和分隔：

$$(PQDuC) = -1.$$

但这就是說，點C是線段PQ的"中點"，所以：

"直徑"d"平分"共軛"直徑"d'的"平行"弦。

这样，利用配極对应所建立的共軛直徑定义与普通的定义一致。

4. 我們分別地在双曲線、抛物線与橢圓的情形來研究共軛直徑的对合。

双曲線与非固有直線交於兩个點，这兩个點是双曲線在非固有直線上確定的共軛點的双曲型对合的二重點(参考§59)。双曲線的中心是曲線外部的點，因此共軛直徑的对合有兩条通过中心与双曲線相切的二重直線(圖236 $б$)，我們已經提过，这兩条直線叫做双曲線的漸近線。因此，漸近線是双曲線共軛直徑的对合的二重直線(参考圖212)。

抛物線切於非固有直線並且在它上面確定共軛點的抛物型对合。抛物線的中心是它与非固有直線的切點。由此可知，第一，抛物線的所有直徑是平行的，第二，直徑束構成抛物型对合，在这个对合裏所有的直徑与非固有直線(在線束中心的切線)(参考圖215)共軛。

橢圓与非固有直線沒有公共點，並且它在非固有直線上確定橢圓型对合。橢圓的中心是曲線內部的點。因此橢圓的共軛直徑構成沒有实二重直線(或者有一对虛二重直線；参考圖216)的橢圓型对合。

一次圖形裏的对合对应所以命名为双曲型对合(有兩个实二重元素的)、抛物型对合(有兩个重合二重元素的)以及橢圓型对合

(有兩个虛二重元素的),我們在上面已經看到,就是由於那些对合分別与双曲線、拋物線以及橢圓相關联。

二次曲線仿射性質的簡單論述就結束到这裏。

§ 70. 度量幾何和它的羣

1. 同素变換的仿射从屬羣是从所有同素变換的羣,依平行的不变性作条件,也就是依非固有直線变为它自身作条件,所劃分出來的一部分。

然而仿射变換不能保持圖形的形狀。譬如,正方形在仿射变換下可以变为平行四边形,圓可以变为橢圓。因此,在仿射幾何裏,並不从平行四边形裏把正方形區分出來,也不从橢圓裏把圓區分出來。在度量幾何裏就要建立这种區分。为了定义度量幾何的变換羣,要求兩条直線的垂直位置对仿射变換的不变性。

設線束 S 的直線 $a, b, c, \cdots$ 对应同一線束 S 裏分別垂直於它們的直線 $a', b', c', \cdots$(圖 238)。这样,有:

$$a \perp a',\quad b \perp b',\quad c \perp c', \cdots$$

我們看一看線束 S 裏这样垂直直線的对应具有甚麼性質。

因为直線 a', b' 对应垂線 a, b,所以角 (a', b') 等於角 (a, b)。因此对应直線所構成的角總是相等的。具有这种性質的兩个線束叫做**合同線束**。顯然合同線束是射影的。事实上,这样的線束裏对应直線的交叉比相等,因为交叉比可以用这些直線構成的角的正弦來表示。由於这个緣故,線束 S 裏垂直直線的对

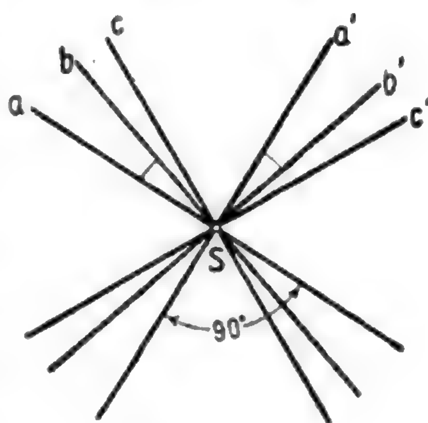


圖 238.

应是射影的。另外,每兩条相垂直的直線互相对应。例如,如果直

線 a 对应（垂直於它的）直線 a'. 反之，直線 a' 也对应（垂直於它的）直線 a。由此我們断定線束 S 裏垂直直線的对应是对合，这种对合叫做**正交对合**。正交对合沒有二重直線，因为直線不能与它的垂直線重合。这种对合是線束的橢圓型对合。

如果用非固有直線截線束 S, 我們就得到和線束 S 透視的點列。線束 S 裏直線的对合將对应非固有直線上透視點列裏點的对合。用字母 $A_\infty, B_\infty, \cdots$ 表示線束 S 裏直線 $a, b, \cdots$ 的非固有點，用字母 $A'_\infty, B'_\infty, \cdots$ 表示同一線束裏垂直於它們的直線 $a', b', \cdots$ 的非固有點，我們在非固有直線上就得到一个对合，在这个对合裏點 $A_\infty, B_\infty, \cdots$ 对应點 $A'_\infty, B'_\infty, \cdots$ (圖 239)。

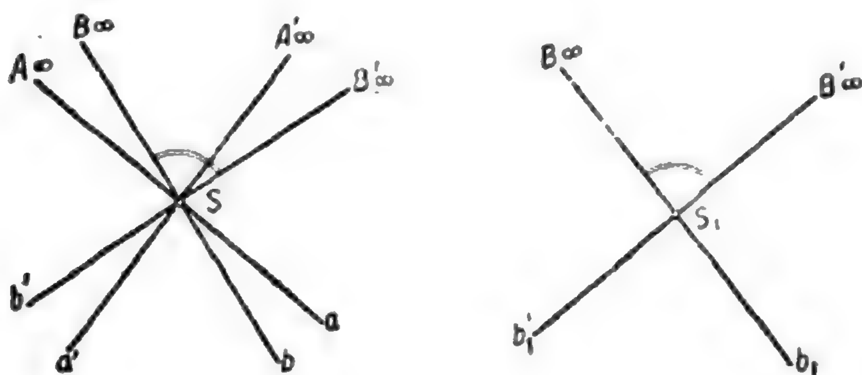


圖 239.

非固有直線上點的这样对合叫做**絕对对合**。

絕对对合是線束的正交对合的截影，这時線束中心的取法沒有任何作用，因为線束 S_1 的正交对合与線束 S 的正交对合在非固有直線上確定同一个对合。很明顯，这是因为線束 S_1 的每对垂直線 b_1 和 b'_1 对应線束 S 的一对垂直線 b 和 b'. 其間

$$b \parallel b_1 \text{ 和 } b' \parallel b'_1.$$

因此，直線对 b_1, b'_1 与直線对 b, b' 在非固有直線上的絕对对合裏確定同一对點 B_∞ 和 B'_∞。

絕对对合顯然是橢圓型的，並且沒有实二重點。

建立了非固有直線上點的絕对对合概念以後，我們就能作出直線垂直的射影定义：

如果兩条直線的非固有點是絕对对合裏的一对对应點，就把它們叫做垂直線。

事实上，如果某兩条直線 b_1 和 b_1' 的非固有點 B_∞ 和 B_∞' 是絕对对合裏的对应點，那末这就是說，正交对合裏有一对垂直線通过點 B_∞ 和 B_∞'。設这兩条直線是 b 和 b'，於是有：

$$b_1 \parallel b \text{ 和 } b_1' \parallel b'.$$

因为 $b \perp b'$，所以 $b_1 \perp b_1'$。反之，我們已經知道，每对垂直線 ($b_1 \perp b_1'$) 与非固有直線交於絕对对合的兩个对应點 (B_∞, B_∞')。

2. 这样，直線垂直的射影定义是与非固有直線上的絕对对合相關的。非固有直線与在它上面的絕对对合叫做平面的絕对形。我們得到了这个概念，用它就可以找到直線垂直的射影定义。但是像在以後要看到的，絕对形的概念还与圖形的其他度量性質有關。因此，如果要區分出来不破坏圖形度量性質的那种同素变換，那末就必須要求要这些同素变換能使平面的絕对形保持不变。

这就是說，我們要區分出不僅把非固有直線变为它自身（仿射羣的所有同素变換是这样变換）而且也把絕对对合变为它自身的那些同素变換，也就是把这个对合的对应點对还变为它的对应點对的那些变換。我們來証明，这样同素变換的集合構成羣。我們用{M}表示这个羣，並用M表示其中的每个同素变換。

事实上，同素变換 M 滿足在 § 67 裏所敘述的要求。如果 M′ 和 M″ 是集合{M}的某兩个同素变換，於是不难断定，它們的積也是同一集合的同素变換。譬如，同素变換 M′ 保持平面的絕对形不变。同样，同素变換 M″ 也保持它不变。逐次实行同素变換 M′ 和 M″ 的結果，我們得到保持平面絕对形不变的同素变換。因此可以

寫成：

$$M' \cdot M'' = M'''.$$

至於說到对变换集合所提出的構成羣時的其他要求，則和对全体同素变换的羣(§ 67) 所引用的完全一样的說法就能証明变換集合{M}也滿足这些要求。

这样，我們就得到結論：不改变平面絕对形的同素变換集合{M}構成一个羣。

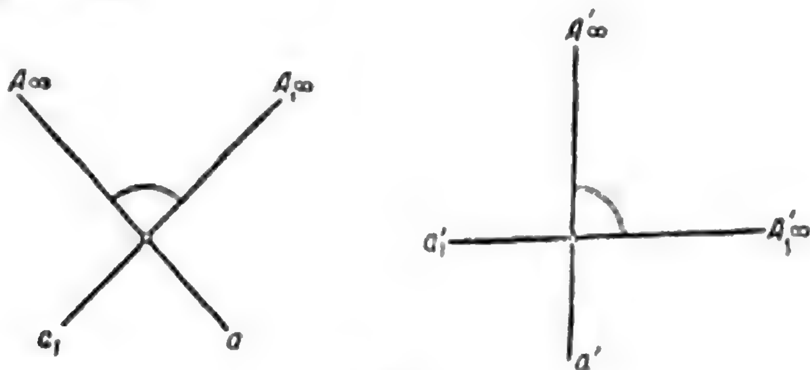


圖 240.

3. 由前面的敍述可知，度量同素变換保持兩条直線的垂直性。譬如，如果有一对垂直線($a \perp a_1$)，則这兩条直線的非固有點 A_∞ 和 $A_{1\infty}$ 是絕对对合的一对对应點(圖 240)。同素变換 M 把點对 A_∞, $A_{1\infty}$ 变为絕对对合裏对应點对 A'_∞, $A'_{1\infty}$。因此，直線 a 和 a_1 的对应直線 a' 和 a'_1 应該是通过絕对对合裏对应點对 A'_∞, $A'_{1\infty}$ 的垂直線。

然而，这个性質还不能完全表明羣{M}的特徵。我們來証明每个同素变換 M 保持兩条直線所構成的角不变。

假定，直線 a 和 b 構成銳角 φ(圖 241)。过角 φ 的頂點引直線 a_1 和 b_1 分別垂直於直線 a 和 b。因此，

$$a_1 \perp a, \quad b_1 \perp b.$$

同素变換 M 把四条直線 a, b, a_1, b_1 变为四条直線 a', b', a'_1, b'_1。因为同素变換 M 不破坏直線的垂直性，那麼就有：

$$a_1' \perp a', \quad b_1' \perp b'.$$

我們來求四条直線 a, b, a_1, b_1 的交叉比：

$$(aba_1b_1) = \frac{\sin(a, a_1)\cdot\sin(b, b_1)}{\sin(b, a_1)\cdot\sin(a, b_1)} = \frac{1}{\cos\varphi\cdot\cos\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi}.$$

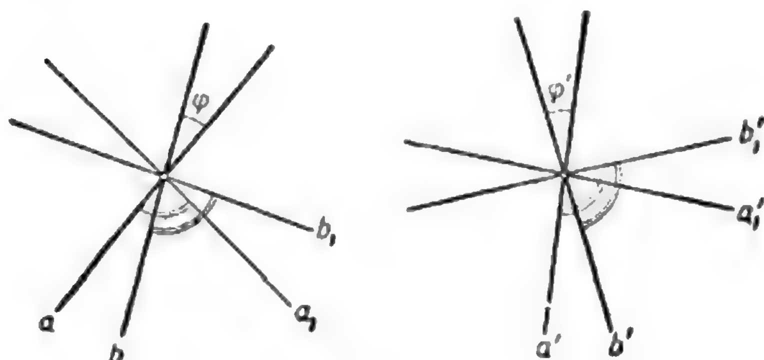


圖 241.

同样，对於四条直線 a', b', a_1', b_1' 就有：

$$(a'b'a_1'b_1') = \frac{1}{\cos^2\varphi'}.$$

但是同素变換不能破坏交叉比，因此应該是

$$(aba_1b_1) = (a'b'a_1'b_1'),$$

或者

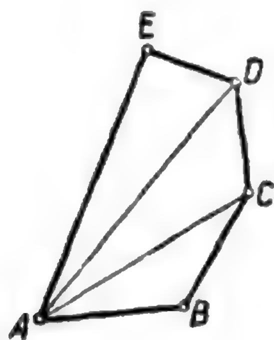
$$\frac{1}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi'}.$$

应該注意，我們是用 φ 表示直線 a 和 b 構成的銳角。後者可以定义为不含垂線 a_1, b_1 的角。在同素变換下它对应的角 φ' 也不含垂線 a_1', b_1'。因此对应角 φ' 也是銳角。在这种情形下，由前面的等式，我們有：

$$\cos\varphi = \cos\varphi'; \quad \varphi = \varphi'. \qquad \text{（証完）}$$

由証明的定理我們断定：任意三角形 ABC 由同素变換 M 变为和它相似的三角形 $A'B'C'$。一般的說，每个圖形 Φ 变为和它相似的圖形 Φ'。这首先在多角形上可以顯現出來（圖 242），因为每个多角形 $ABCDE$ 可以分为三角形。所以对应的多角形 $A'B'C'D'E'$

可以分为对应相似的三角形。由此推出，多角形 $ABCDE$ 与 $A'B'C'D'E'$ 相似。其次还可以断定兩个对应線段的比總是一定的。



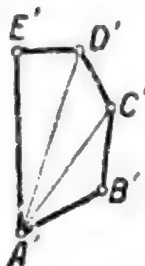


圖 242.

假定任意选取的兩个線段 AB 和 CD，在同素变換 M 下它們对应線段 $A'B'$ 和 $C'D'$（圖 243）於是四角形 $A'B'C'D'$ 和四角形 $ABCD$ 相似，因为这兩个四角形都是由兩对相似三角形組成。因此有

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{CD}{C'D'}=k.$$

这样，兩个对应線段的比是一定的。这就証明同素变換 M 是**相似变換**❶。根据这个，度量同素变換的羣 {M} 也叫做**相似羣**。

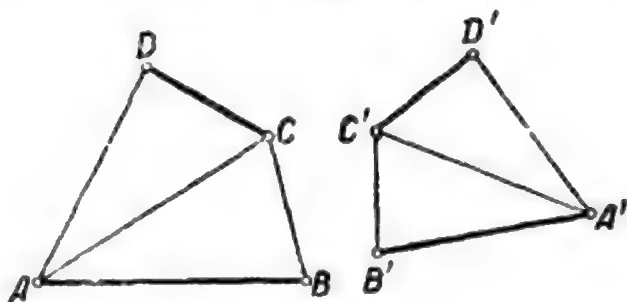


圖 243.

4. 我們最近的問題將是用射影的观點進一步研究度量幾何的基本概念，这使我們能够確定这些概念關於同素变換羣 {M} 的不变性。

作为例子，我們应用直線垂直的射影定义來作下面定理的証明：三角形的三个高交於一个點。

第二笛沙格定理（对偶定理）說明，从平面的任意點 S 向完全四角形的三对对頂點投射的三对直線屬於同一个对合（§ 33）。把

❶ 同素变換 M 也叫做**等形变換**，也就是不改变圖形形狀的变換。

这个定理应用到由下面的直線構成的四边形上：已知三角形 ABC 的三个边与非固有直線。用 S 表示三角形 ABC 的兩个高的交點（圖 244）：

$$S = AS \times BS.$$

我們來証明第三个高 CS 通过點 S。

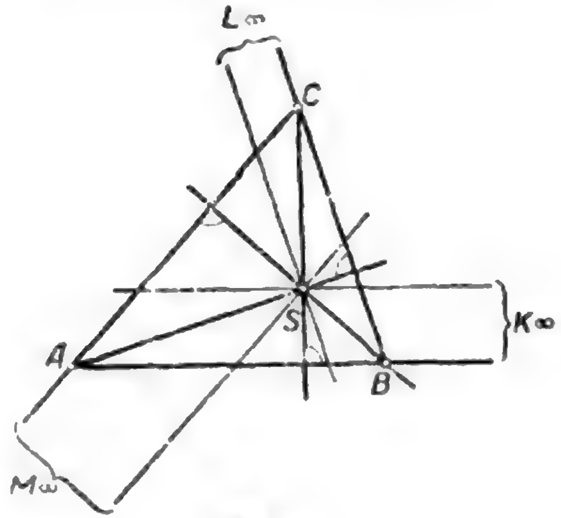


圖 244.

已知四边形的对頂點是點对

A 和 L_∞，B 和 M_∞，

C 和 K_∞.

於是我們得到下面的对合对应直線对：

$$SA, SL_\infty;\ SB, SM_\infty;\ SC, SK_\infty.$$

从圖我們看出，前兩对是正交的（$SA \perp SL_\infty$, $SB \perp SM_\infty$）。所以，線束 S 裏直線的对合是正交对合。因此，第三对也是正交的，也就是

$$SC \perp SK_\infty. \qquad \text{（証完）}$$

§ 71. 用射影观點对於合同圖形的研究・移動羣

1. 在这一節裏我們將說明，用射影形式可以作普通度量幾何裏關於合同圖形的研究。並且这使我們可以確定合同圖形的概念是關於某个同素变換羣的不变性。这个羣就是所謂移動羣。

我們首先討論通常在初等幾何裏所開展的關於合同圖形的研究。幾何圖形可以看做是在平面上佔有不同位置的不变的体系。从圖形的一个位置移到它的另一个位置叫做**移動**。假定移動把已知平面圖形 F 移到新的位置 F'。在这种情形下我們說，圖形 F 能

与圖形 F' 疊合，或者說，圖形 F 落在圖形 F'❶。这样的兩个圖形叫做合同圖形。

因为在这种观點下，兩个合同圖形不过是同一个不变(剛体)体系的兩个不同位置，所以圖形 F 的每个點 A 对应圖形 F' 的點 A'。当圖形 F 和 F' 重合時，點 A 和 A' 重合。由此可知，關於合同圖形的研究，可以看作是關於它們元素間具有一定性質的一一对应的研究。

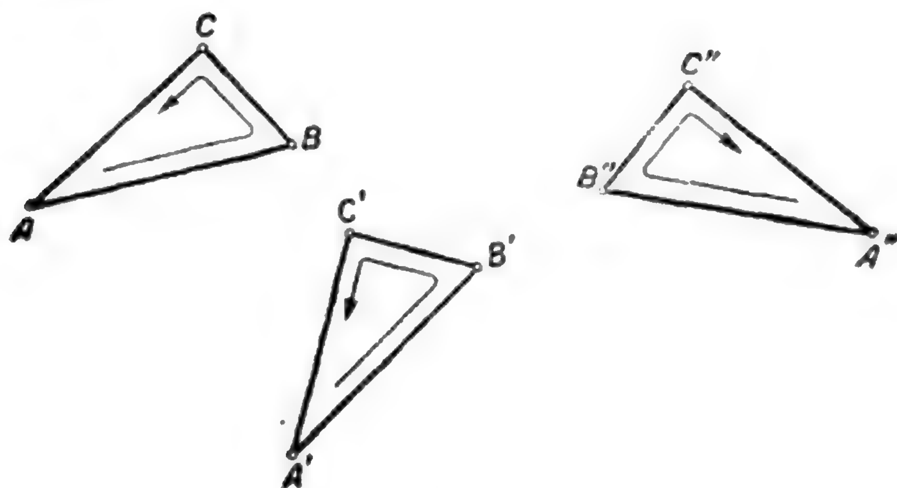


圖 245.

移動可以看作是圖形 F 变为和它合同的圖形 F' 的幾何变换❷。另一方面，如果我們確定了場到它自身的哪一种变换是移動，那末合同概念就可以利用这种变换——移動——來定义。

要按这样計劃來作關於合同性的研究，我們应該：1)劃分出把已知的任意平面圖形变到平面上任意新位置所必需且充分的那些移動(幾何变换)；2)給予这些变换以射影的說明；3)作出關於射影形式的(屬於確定同素变换羣的)合同圖形的研究。

为了这个計劃的实現，首先必須研究普通(歐幾里得)平面幾何裏關於合同圖形的問題。

❶ 当利用这移動時，圖形 F' 也可以與圖形 F 疊合。

❷ 这样的变换也叫做"正交变换"。

2. 假定有兩个合同三角形 ABC 和 $A'B'C'$（圖 245）。由这兩个三角形的合同性得到它們的对应边与对应角的合同性。此外三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 有相同的迴轉。三角形边的迴轉使三角形的面積在移動方向的左側（换句話說，就是逆時針的迴轉）時，就叫做**正迴轉**。第一个三角形的迴轉 ABC 正具有这样的性質。与它合同的第二个三角形的对应迴轉 $A'B'C'$ 也具有同样的性質。这兩个三角形有相同的（正）迴轉（在圖 245 裏，用箭头表示迴轉）。如果我們观察和三角形 ABC 合同的另一个三角形 $A''B''C''$（圖 245），情况就不是这样。虽然这兩个三角形的所有对应元素（边与角）都相等，但是它們的迴轉是**相反的**。事实上，第一个三角形的**正迴轉** ABC 对应第二个三角形的**負迴轉** $A''B''C''$（对於三角形的边在順序 $A''B''C''$ 下的迴轉，三角形的面積在移動方向的右側）。

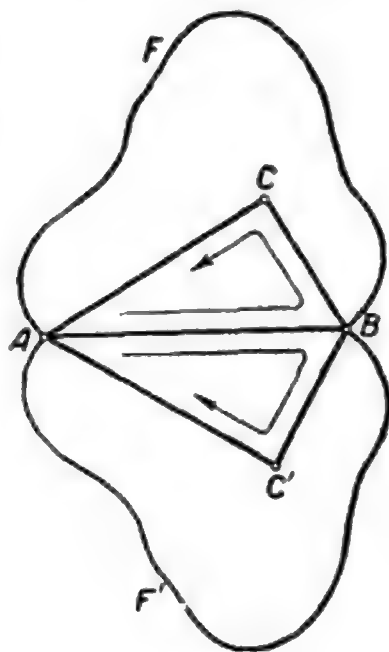


圖 246.

也可以說，三角形 ABC 和 $A''B''C''$ 是**異向的**，而三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 是**同向的**，因此，平面上的兩个合同圖形可能是同向的或者是異向的。这种情况，当我們研究兩个合同圖形中的一个与另一个重合的移動時，是必須考慮到的。

假定任意平面圖形 F 的兩个點 A 和 B 是固定的。在这种情形下，圖形 F 可以佔有兩个可能位置（圖 246 裏的 F 和 F'）中的一个。

事实上，如果圖形 F 的某个點 C 与點 A 和 B 不同，則三角形 ABC 在平面上可以佔有關於直線 AB 对称的兩个不同位置（三角

形 ABC 和 ABC')。顯然，对於圖形 F 的每个點都可以这样說。由此我們断定，如果圖形 F 的兩个點 A 和 B 在平面上是固定的，那麼，它只能佔有關於直線 AB 对称的兩个不同位置 F 与 F'。像我們从圖裏所看到的，这兩个位置有不同的迴轉方向(三角形 ABC 和 ABC')，因此，圖形 F 和 F' 是異向的。

如果再考慮有定向的圖形 F，則这样的圖形在平面上的位置由它的某兩个已知點唯一確定。

現在我們來証明下面的定理[1]：

在一个平面上的兩个合同圖形，利用一个旋轉(有固有中心或非固有中心的)或者是利用一个旋轉与反射，就可以使它們重合。

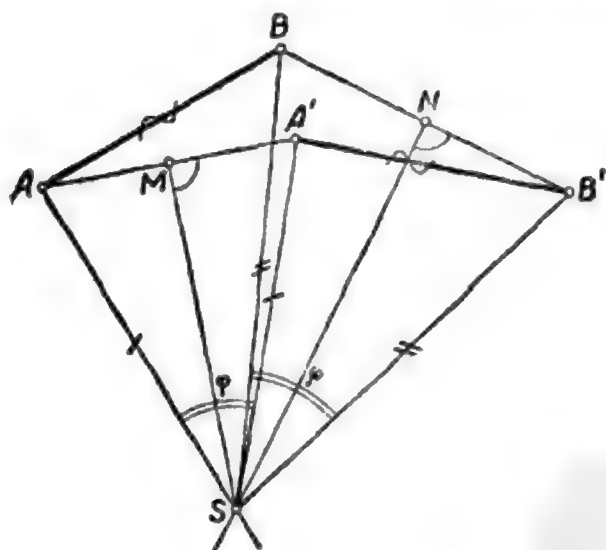


圖 247.

我們知道，某个圖形一对點的位置確定圖形本身的兩个可能位置，其中一个与另一个对称。

因此，我們可以用圖形的一对點或者端點屬於圖形的一个線段來代替这个圖形。譬如，在圖 247 裏，合同圖形中的第一个圖形，用線段 AB 表示，而線段 $A'B'$ 表示第二个圖形。

引直線 AA' 和 BB'。过線段 AA' 和 BB' 的中點 M 和 N 作它們的垂線 MS 和 NS。用 S 表示兩垂線的交點。現在不难断定繞中心 S 且經过角 $\varphi=\angle ASA'=\angle BSB'$ 的旋轉把線段 AB 变为

[1] 这个定理的另外一些敍述方式可見於动力学裏，那裏把它叫做薩尔-歐拉定理。

$A'B'$ 事实上，三角形 SAB 和 $SA'B'$ 是合同的，因为 $SA=SA'$；$SB=SB'$ 和 $AB=A'B'$。从三角形的相等我們得到:

$$\angle ASB=\angle A'SB'.$$

在这两个角上都加以角 BSA'，就有:

$$\angle ASA'=\angle BSB'=\varphi.$$

繞點 S 且經过这样一个角的旋轉把點 A 变为點 A' 並且把點 B 变为點 B'。所以經这个旋轉時，線段 AB 变为線段 $A'B'$。

如果垂線 MS 和 NS 是平行的或者是重合的，那末这裏所作的論証是不可能的。我們來分析这兩种情形(圖 248 与 249)。如果，$MP \parallel NQ$，則 $AA' \parallel BB'$。但这就是說，合同線段 AB 和 $A'B'$ 可能在平行的位置(像圖248)，或者是在对称的位置(像圖249)，第一种情形構成平行四边形，第二种情形構成等腰梯形。在後一种情形下，过點 M 和 N 的兩条垂線重合，直線 MN 的每个點都可以看作是这兩条垂線的公共點。取直線 AB 和 $A'B'$ 的交點作为旋轉中心 S:

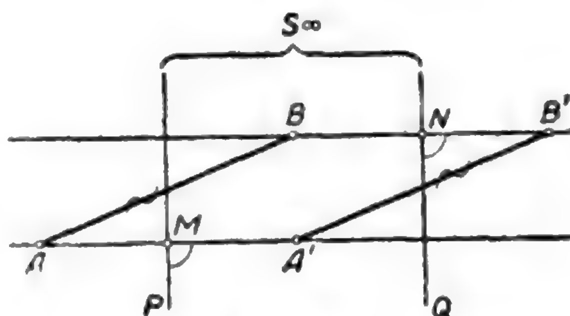


圖 248.

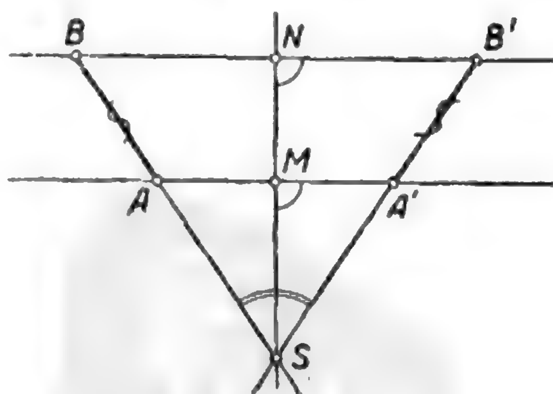


圖 249.

$$S=AB\times A'B'.$$

顯然點 S 在直線 MN 上，就是說它可以看做是重合垂線 MN 的交點。繞點 S 經过角 $ASA'=\varphi$ 的旋轉就把線段 AB 变为線段

$A'B'$。

在線段 AB 和 $A'B'$ 平行的情形下（圖 248），利用向量 $\overrightarrow{AA'}$ 所確定的平行移動，可以使它們重合。應該注意，当引進非固有元素時，平行的垂線 MP 和 NQ 就可以看做是相交於非固有點 S_∞。这样的观點可以使平行移動的情形被解釋作具有非固有中心 S_∞ 的旋轉。以後，过渡到变換的射影形式時，对这我們就有了一切根据。

这样，利用具有固有中心的旋轉或者是具有非固有中心的旋轉（平行移動），我們就可以使線段 AB 与線段 $A'B'$ 重合。隨着，圖形 F 和 F' 或者重合，或者關於直線 $A'B'$ 对称。在後面这种情形下，作關於直線 $A'B'$ 的反射（軸对称）就可以使圖形 F 与圖形 F' 重合。定理已被証明。

从証明了的定理直接推出，为了用射影观點研究平面上合同圖形，就应該進行分析圖形的旋轉与平行移動所对应的幾何变換，並論及它們的反射或軸对称。以後我們將說明，以上所說的所有变換可以歸結为後面的一种，就是反射。因此，我們着手用可以看做是塌到它自身的某种射影变換（同素变換）的反射來研究移動。

3. 反射，或軸对称（圖 250）。我們曾屢次遇到这种变換，已把它歸到仿射透射（§ 51）或透視仿射变換裏。这种透射的中心 S_∞ 是垂直於透射軸 S 的所有投射線 AA'、BB'、CC'，…的非固有點。回想垂直的射影定义（§ 70），我們可以說，在軸对称情形下，透射中心 S_∞ 在絕对对合裡对应透射軸 S（也就是对称軸）的非固有點 S^*_∞。这样，我們就得到軸对称（反射）的射影定义：

反射是仿射的透射，它的非固有中心在絕对对合裏对应透射軸的非固有點。

軸对称的非固有中心 S_∞ 和軸 S 的非固有點 S^*_∞ 都是非固有直線的二重點。非固有直線上其餘的點在它的上面变更位置（当

然,保持在非固有直線上)。但这時我們需要指出軸对称的重要性質：它把絕对对合的每对对应點变为同一个对合的一对对应點。或者簡單地說：軸对称把絕对对合变为它自身。

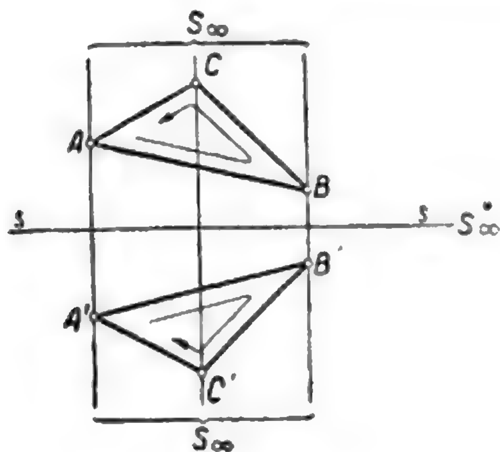


圖 250.

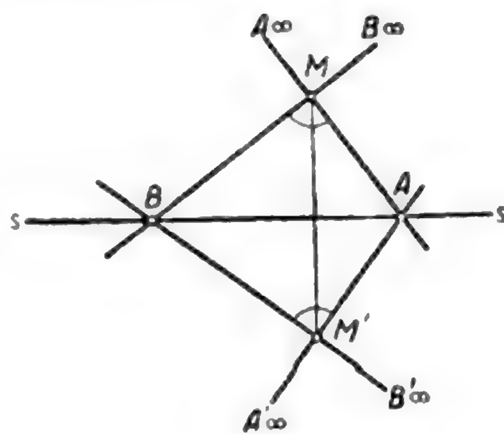


圖 251.

这个性質容易驗証。絕对对合的对应點对 A_∞, B_∞ 可以用通过它們的直線 MA 和 MB 來確定（圖 251）。如果我們要使直線 MA 和 MB 垂直，則它們的非固有點是絕对对合的一对对应點。反射把直線 MA 和 MB 分別变为直線 $M'A$ 和 $M'B$，並且顯然：

$$M'A \perp M'B.$$

直線 MA 的點 A_∞ 在反射裏对应直線 $M'A$ 的點 A'_∞；直線 MB 的點 B_∞ 在反射裏对应直線 $M'B$ 的點 B'_∞。这時點 A'_∞ 和 B'_∞ 在絕对对合裏是对应點。这样，絕对对合的點对变为同一个对合的點对(証完)。

反射的这个性質表明，反射应該歸入組成羣{M}的同素变換內。

我們还要提到反射的另一个重要性質。从圖 250 看到，三角形 ABC 經过反射以後变为三角形 $A'B'C'$。这時迴轉方向变为相反的(三角形 ABC 的正迴轉变为三角形 $A'B'C'$ 的負迴轉)。所以：

反射把圖形的方向变为相反的。

研究了反射的基本性質与它的射影說明（是羣 {M} 裏的同素变換）之後，我們可以轉到对旋轉的研究上。

4. 旋轉（具有固有中心的） 在初等幾何裏，旋轉定义为場到它自身的一种变換，在这种变換下，从點 S（旋轉中心）所引的所有點的向徑都旋轉一个定角 φ（已知大小和方向）。

我們來証明下面的定理：

每个旋轉可以表示成兩个反射的積，並且一个反射的軸可以是通过旋轉中心的任意直線

証明 假定，旋轉是由中心 S 与旋轉角 $\varphi = MSM'$ 所決定的。假設以通过點 S 的直線 x 作为一个反射的軸（圖 252）。指定平面的任意點 M 並且進行具有軸 x 的反射变換。用 M_1 表示在这个反射下點 M 所变成的點，並且用 M' 表示在已知旋轉下點 M 所变成的點。过點 S 引直線 y 垂直於直線 M_1M'，並且用它作为第二个反射的軸。因为三角形 M_1SM' 是等腰的，所以它的

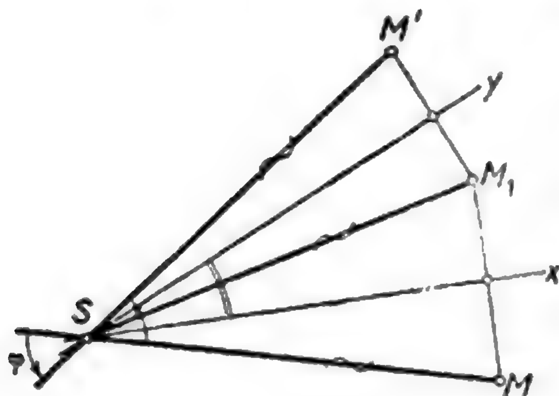


圖 252.

高同時是它的中線也是頂角的平分線。由此得到具有軸 y 的反射把點 M_1 变为 M'。因此，具有軸 x 和 y 的逐次兩个反射把點 M 变为點 M'。然而，为了推斷所提到的兩个反射能代替已知的旋轉，必須証明無論我們設想旋轉的點 M 是平面上哪个點，第二个軸 y 也是保持不变的。

固定第一个反射的軸 x。於是軸 x 和 y 所構成的角是一定的，並且可以用旋轉角表示成下面的形狀：

$$\angle(x,y)=\angle xSM_1+\angle M_1Sy=$$

$$=\angle\frac{MSM_1}{2}+\angle\frac{M_1SM'}{2}=\angle\frac{MSM'}{2}=\frac{\varphi}{2}=\text{常數}.$$

由此断定，軸 y 对於平面的所有點保持不变。所以，已知旋轉可以用兩个反射來代替，並且其中一个反射的軸是預先选取的直線 x。所得的結果可以表示成下面的符号等式：

$$\mathbf{V}=\mathbf{S}_x\cdot\mathbf{S}_y.$$

这裏，字母 V 表示旋轉，而字母 $\mathbf{S}_x$ 和 $\mathbf{S}_y$ 分別表示具有軸 x 和 y 的反射。

我們再轉到平行移動的研究上。

5. 平行移動，或具有非固有中心的旋轉。

我們把平行移動理解作場的一种变換，这种变換把場的所有點平行移動同样的距离。點的移動由向量 $\overrightarrow{MM'}$ 完全確定。这个向量叫做平行移動向量。

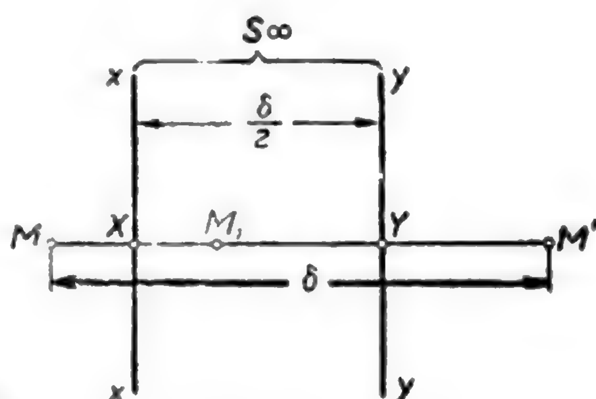


圖 253.

我們來証明定理：

平行移動總可以表示成兩个反射的積，它們的軸垂直於移動向量的方向，並且其中一个軸可以任意选取。

証明 假定平行移動由向量 $\overrightarrow{MM'}$ 確定。我們取垂直於直線 MM' 的任意直線 x 作为第一个反射的軸（圖 253）。用 M_1 表示在第一个反射下點 M 变成的點。用垂直於直線 MM' 並且通过線段 M_1M' 中點的直線 y 作为第二个反射的軸。这時反射 $\mathbf{S}_x$ 把點 M 变为點 M_1，而反射 $\mathbf{S}_y$ 把點 M_1 变为點 M'。我們來証明，第一个反射

和第二个反射的軸 x 和 y 对於場的所有點保持不变。为了这个目的,固定第一个反射軸 x 的位置,並且証明第二个反射軸 y 的位置与點 M' ❶ 的取法無關。軸 x 到軸 y 的距离 XY 是確定的,我們有:

$$XY=\frac{MM_1}{2}+\frac{M_1M'}{2}=\frac{MM'}{2}=\frac{\delta}{2}=\text{常數}。$$

由此可知,对於場的所有點第二个軸 y 是不变的,而且具有軸 x 和 y 的兩个反射与平行移動 $\overrightarrow{MM'}$ 等值。

这样,平行移動就可以用具有平行軸(x 和 y)的兩个反射合成的变換來定义。但是,我們已經知道,它也可以用繞中心 S 的場的旋轉來表示,这裏 S 是組成反射的軸 x 和 y 的交點。

在平行移動的情形下,反射軸的交點是非固有點,我們用字母 S_∞ 表示它。从射影幾何的观點來看,这並不是特別的变換。因此,我們可以把平行移動变換歸入旋轉內。用 $\mathbf{V}_\infty$ 來表示它(具有非固有中心的旋轉):

$$\mathbf{V}_\infty=\mathbf{S}_x\cdot\mathbf{S}_y.$$

另一方面,在 § 51 裏我們曾經研究过,平行移動是具有非固有中心和非固有軸的仿射透射。顯然,这个透射的非固有中心由移動向量 $\overrightarrow{MM'}$ 的方向確定,同時旋轉的非固有中心 S_∞ 由向量 $\overrightarrow{MM'}$ 的垂直方向決定。由此我們斷定,在平行移動的情形下,旋轉的非固有中心 S_∞ 在絕对对合裏对应透射的非固有中心 S^*_∞。这个注意將來对於我們是有用的

我們要注意旋轉(具有固有中心或非固有中心的)的下面一些重要性質。

旋轉不改变平面上圖形的方向。

事实上,旋轉可以看作兩个反射的積,因为每个反射都把圖形的方向变为相反的,所以它們的積保持圖形的方向同变換前一

❶ 但反射軸 y 的位置自然是与軸 x 的取法有關的。

样。

現在很明顯，如果平面上有兩个同向的合同圖形，則它們通过一个旋轉（具有固有中心或非固有中心的）就可以重合。如果合同圖形是異向的，則利用旋轉与反射就可以使它們重合。这个補充使前面提过的薩尔-歐拉定理的說法更加明確。

6. 从前面我們看到，作为合同性研究的根据，可以应用**移動**，也就是使合同圖形疊合的变換。这样的变換是旋轉（具有固有中心或非固有中心的）与反射。最終像已經証明过的，所有这些变換都歸結为反射。然而反射是包含在羣{M}裏而具特殊型的同素变換。因此，在普通歐幾里得幾何裏合同圖形的研究，得到了射影观點的**解釋**。这就使我們能够用普遍形式在射影平面上作合同性的研究。

假定，取任意直線 u 作为"非固有"直線（圖 254）。假設在这条直線上已知某个有"絕对对合"作用的橢圓型对合。用字母 A_u, A'_u 和 B_u, B'_u 表示这个对合的兩个对应點对。不难断定，可以利用場的同素变換把直線 u 变为平面的非固有直線，而橢圓型对合 (A_u, A'_u), (B_u, B'_u) 变为它上面的絕对对合。事实上，以線段

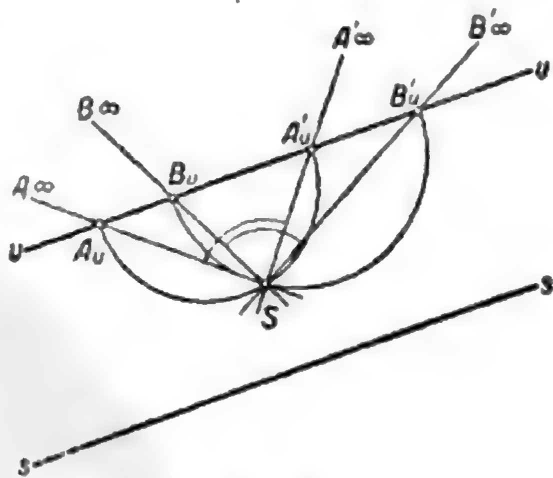


圖 254.

$A_uA'_u$ 和 $B_uB'_u$ 为直徑作兩个圓，並且用字母 S❶ 表示它們的一个交點。於是具有中心 S 而且把直線 u 变为非固有直線的任意一

---

❶ 因为 $A_uA'_u \div B_uB'_u$，所以这兩个圓總相交。

个透射都把已知的橢圓型对合变換为絕对对合。这由於點 S 的作法就可以推出，就是：

$$SA_u \perp SA'_u \text{ 和 } SB_u \perp SB'_u.$$

因此透射裏橢圓型对合的點对 A_u, A'_u 和 B_u, B'_u 变成絕对对合的點对 A_∞, A'_∞ 和 B_∞, B'_∞。

順便指出，我們用过了平面上这样兩个點中的一个作为透射中心 S，从它們可以把已知的橢圓型对合投射成正交对合（換句話說，張直角的对合）。具有这样性質的點叫做**拉蓋尔**（Laguerre）點。为了完全確定这个透射，只要給出透射軸就够了。这个透射軸可以是平行於直線 u 的任何直線（因为它应該通过直線 u 与非固有直線——u 的对应直線——的交點）。

7. 總之，为了实現度量幾何的射影形象，我們假設給定的平面上"絕对形"具以下形式。

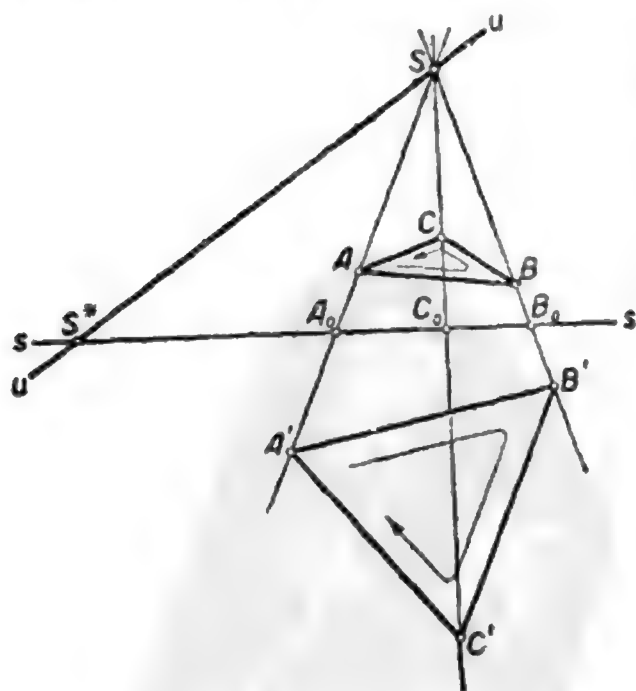


圖 255.

給出"非固有"直線 u 与在它上面的"絕对"对合（圖255）。我們已經知道，为了这个目的，可以用平面上的任意直線和在它上面的任意一个已知橢圓型对合。我們來証明在这个方案裏可以实現"反射"与"旋轉"，因而也可以实現"合同"圖形的作圖。

圖 255 表明在具有軸 S 的"反射"裏已知三角形 ABC 的对应

三角形 $A'B'C'$ 的作法．我們知道，这样"反射"的"中心" S 应該是反射軸 S 的"非固有"點 S_* 在直線 u 上的"絕对"对合裏所对应的"非固有"點。作出这样的點 S（§ 33），引直線 SA, SC 和 SB 並且在它們上面找出點組

$$SA_0A,\ SB_0B,\ SC_0C$$

的第四調和點 A', B' 和 C'。

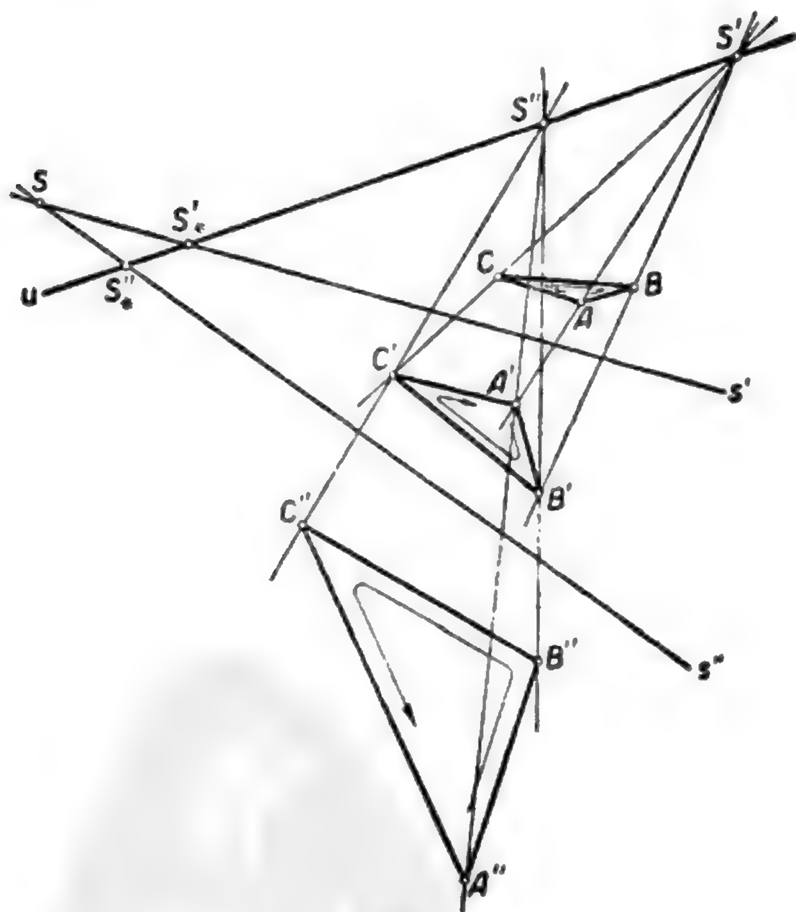


圖 256.

顯然，在这些条件下，直線 AA', BB' 和 CC' 是反射軸 S 的垂線，並且这些線段分別被點 A_0, B_0 和 C_0 "平分"。"反射"三角形 ABC 我們就得到和它合同的三角形 $A'B'C'$，但它們是異向的。

应該注意，"反射"是对合的透射。事实上，如果點 A 对应點

A'，反过來因为點 A 也是點組 SA_0A' 的第四調和點，點 A' 也对应點 A。因此，兩次重複"反射"就成为恆等变换。圖 256 表示三角形 ABC 繞中心 S 的旋轉，这个旋轉由兩次"反射"所組成：其中一个具有軸 S'，而另一个具有軸 S'' 軸的"非固有"點 S'_* 和 S''_* 在"非固有"直線 u 上的"絕对"对合裏对应"反射"的中心 S' 和 S''。在圖 256 裏所作的三角形 ABC, $A'B'C'$ 和 $A''B''C''$，从"度量幾何"的观點來看，它們是"合同的"，並且其中兩个（ABC 和 $A''B''C''$）是同向，而第三个（$A'B'C'$）与它們異向。

不難想像"平行移動"是具有"非固有"中心的"旋轉"。在这种情形下，兩个反射的軸 s' 和 s'' 相交於直線 u 上的非固有點 S。这样，当點 S'_* 和 S''_* 与點 S 重合因而點 S' 和 S'' 也重合時，我們有"旋轉"的特殊情形。这結果使整个作圖簡單化。

我們來証明"平行"移動把直線变为与它"平行"的直線。

假定，"平行移動"是由具有相交於"非固有"點 S 的軸 s' 和 s'' 的兩个"反射"所確定的（圖257）。我們看，哪条直線在这个"平行移動"下对应已知直線 AA_u。首先实行第一个"反射"（具有軸 s' 的），我們作點 S 在"絕对"对合裏的对应點 S_*，直線 S_*A"垂直"於軸 s'，在直線 S_*A 上求出點 A'，它使

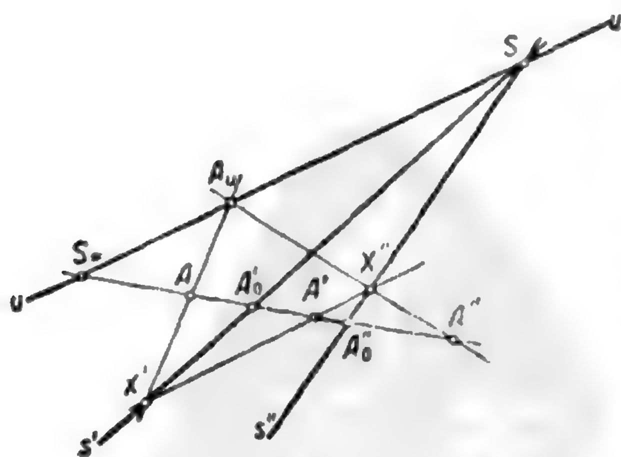


圖 257.

$$(S_*A'_0AA') = -1.$$

这時點 A' 是點 A 關於直線 s' 的"反射"點。因此，第一个"反射"把直線 AX'（AA_u）变为直線 $A'X'$（$A'X''$）。

第二个"反射"(具有軸 s'' 的)把點 A' 变为點 A''，並且

$$(S_*A''_0A'A'')=-1.$$

所以，直線 $A'X''$ 变为直線 $A''X''$。

我們來証明，所得到的直線 $A''X''$"平行"於已知直線 AA_u，也就是它通过直線 AA_u 的"非固有"點 A_u。为了証明，我們來研究中心在點 X' 和 X'' 的兩个射影線束。射線 $X'(S_*, A'_0, A, A')$ 構成四条調和射線，同样射線 $X''(S_*, A''_0, A'', A')$ 也構成四条調和射線。因此可以看作它們是对应射線，在所建立的線束 X' 和 X'' 的对应裏，射線 $X'X''$ 自身对应($X'A'$ 对应 $X''A'$)，因此，所研究的線束是透視的。它們的透視軸是"非固有"直線 u，因为对应射線对 $X'S_*$, $X''S_*$ 和 $X'A'_0$, $X''A''_0$ 交於这条直線上的點 S_* 和 S。由此我們断定对应射線 $X'A$ 和 $X''A''$ 也应該相交於"非固有"直線 u 上的點，也就是點 A_u。所以，在"平行移動"下已知直線 AA_u 变成的直線 $A''X''$ 与它"平行"(証完)。

这样为了实現平面上的"移動"所需要的幾何变换就得到了射影的定义。

它們全部应該歸入不改变平面"絕对形"的羣 {M} 的同素变换裏。

8. 我們用字母 V 表示"旋轉"变换(具有固有中心或非固有中心的)，而用字母 S 表示"反射"。这時，按定义，由已知圖形經过变换 V 或变换 V·S 所得到的圖形叫做已知圖形的"合同"形。我們知道，变换 V 不改变平面圖形的方向，但是变换 V·S 改变圖形的方向。因此，把变换 V 也叫做第一种"移動"，变换 V·S 叫做第二种"移動"。

我們來証明，第一种"移動"与第二种"移動"構成一个羣，它是度量同素变换羣 {M} 的从屬羣。

为此，我們只要断定所有"移動"的集合，也就是变换 V 和 V·S

的集合，滿足 § 67 裏所敍述的条件就够了。我們按它們的另一种順序分别來研究每个条件

1°. 集合裏变換的積滿足結合法則。

因为在 § 67 裏我們已經对於任意同素变換証明过結合法則，所以它对於我們所謂"移動"的变換仍然成立。因为我們知道，"移動"屬於同素变換内。

2°. 集合的变換裏包含恆等变換

这样的变換是:

$$V = S \cdot S = S^2 = 1.$$

事实上，我們知道，兩次重複反射就導至恆等变換。

3°. 对於集合的每个变換總存在它的逆变換，它也屬於这个集合。

实际上，我們知道，反射的逆变換还是同一个反射，也就是:

$$S^{-1} = S; \quad S^2 = 1.$$

因此，对於形狀像 $V = S_1 \cdot S_2$ 的变換，它的逆变換是变換

$$V^{-1} = S_2 \cdot S_1.$$

这很容易驗証，因为

$$V \cdot V^{-1} = S_1 \cdot S_2 \cdot S_2 \cdot S_1 = S_1 \cdot S_2^2 \cdot S_1 = S_1 \cdot S_1 = S_1^2 = 1.$$

对於形狀像 $V \cdot S = S_1 \cdot S_2 \cdot S$ 的变換，它的逆变換是变換

$$S \cdot V^{-1} = S \cdot S_2 \cdot S_1.$$

事实上:

$$(V \cdot S) \cdot (S \cdot V^{-1}) = S_1 \cdot S_2 \cdot S \cdot S \cdot S_2 \cdot S_1 = S_1 \cdot S_2 \cdot S^2 \cdot S_2 \cdot S_1 =$$

$$= S_1 \cdot S_2^2 \cdot S_1 = S_1^2 = 1.$$

4°. 集合裏任意兩个变換的積还是这个集合的变換。

从下面的想法出發，这是很容易斷定的 集合的变換或者是由偶數个反射 ($V = S_1 \cdot S_2$) 組成的，或者是由奇數个反射 ($V \cdot S = S_1 \cdot S_2 \cdot S$) 組成的。因此，它們的積也是由偶數个反射或奇數个反

射組成的。我們來証明，在第一种情形下，这些变換是第一种"移動"(V)，而在第二种情形下，則是第二种"移動"。

为此，我們首先判断任意兩个"旋轉"的積也是"旋轉"。

設 V_1 和 V_2 是兩个任意的"旋轉"。用 S_1 和 S_2 表示这兩个旋轉的中心。用字母 S 表示具有軸 S_1S_2 的"反射"。於是，已知的"旋轉"可以表示成下面的形狀(参考 296 頁)：

$$V_1=S_1\cdot S;\quad V_2=S\cdot S_2.$$

"反射"S_1 和 S_2 的軸容易確定(参考 297 頁)，並且"反射"S_1 的軸可以由逆变換 $V_1^{-1}=S\cdot S_1$ 求得。作已知"旋轉" V_1 和 V_2 的積，我們得到：

$$V_1\cdot V_2=S_1\cdot S\cdot S_2=S_1\cdot S_2=V_3,$$

就是某个"旋轉"。現在就不难对於任意兩个"移動"來証明性質 4°了。事实上，我們曾經說过，兩个"移動"的積是由偶數个或奇數个"反射"組成的。在第一种情形下，可以把所有的变換分为"反射"对：

$$(S_1\cdot S_2)\cdot(S_3\cdot S_4)\cdots(S_{2n-1}\cdot S_{2n})=V'\cdot V''\cdots V^{(n)}=V.$$

所以，結果就是"旋轉"(第一种"移動")。

在第二种情形下，除一列"反射"对以外还另有一个"反射"。顯然，在这种情形下作成下面的变換：

$$V'\cdot V''\cdots V^{(n)}\cdot S=V\cdot S,$$

也就是得到第二种"移動"。

因为我們所謂"移動"的变換集合滿足所有的条件 1°－4°，所以这个集合構成一个羣。把它叫做"移動"羣{W}。

9. 当作關於圖形"合同"的研究時，我們必須預先研究所謂"移動"的幾何变換。現在我們可以看作对於所有"移動"不变的性質而引進圖形"合同"的概念。

如果存在一种"移動"，它把圖形 F 变为圖形 F'，我們就說圖形

F和圖形F'"合同"。

从所謂"移動"的变换的性質，可以推得關於圖形"合同"概念的性質。譬如从恆等变换可以看作是"移動"就推得每个圖形和它自身合同。

假定，圖形F和圖形F'"合同"。按定义，这就是說存在一个"移動"把圖形F变为圖形F'。这時，像我們所看到的，也存在逆"移動"把圖形F'变为圖形F。所以圖形F'也和圖形F"合同"。於是我們得到圖形合同的已知性質：

如果圖形F和圖形F'合同，則F'也和F合同。

其次，設圖形F和圖形F'合同，而圖形F'和圖形F''合同。在这种情形下，存在把圖形F变为F'的"移動"，也存在把圖形F'变为F''的"移動"。这兩个"移動"的積把圖形F变为F''。所以，圖形F和F''也是"合同的"。於是我們得到下面圖形"合同"的性質：

如果圖形F和圖形F'合同，而圖形F'和圖形F''合同，則圖形F和F''也是"合同的"。

这样，我們可以作出關於平面上圖形"合同"的研究，作为射影幾何的特殊部分，它是与所研究的特殊同素变换("移動")有關的。而这样同素变换又是与平面的"絕对形"，也就是与"非固有"直線和它上面的橢圓型对合的取法有關的。

§ 72. 射影观點下的相似圖形

在§70裏我們研究过羣{M}的变换，也就是不破坏平面絕对形的同素变换。我們判明了所有这样的同素变换都是相似变换。反之，我們不难看出：每个相似变换也是同素变换M。事实上，相似变换把直線变为直線，並且保持直線的平行性与正交性。所以，这种变换是把絕对对合变为它自身的仿射同素变换。由此可知，相似变换屬於同素变换羣{M}。

假定，同素变換M把三角形 ABC 变为相似三角形 $A'B'C'$（圖258）。在直線 AB 上从點 A 起截取線段 $AB_1=A'B'$。我們進行中心在點 A 並且係數为 $k=\frac{AB_1}{AB}$ 的位似变換。在这个位似变換下，三角形 ABC 变为和三角形 $A'B'C'$ 合同的三角形 AB_1C_1。由此看出，利用兩个同素变換，卽把三角形 ABC 变換为三角形 AB_1C_1 的位似变換 H 与把三角形 AB_1C_1 变換为三角形 $A'B'C'$ 的移動 W，就可以从三角形 ABC 变到三角形 $A'B'C'$。所以，同素变換M可以看作是变換 H 和 W 的積：

$$\mathrm{M}=\mathrm{H}\cdot\mathrm{W}. \qquad (1)$$

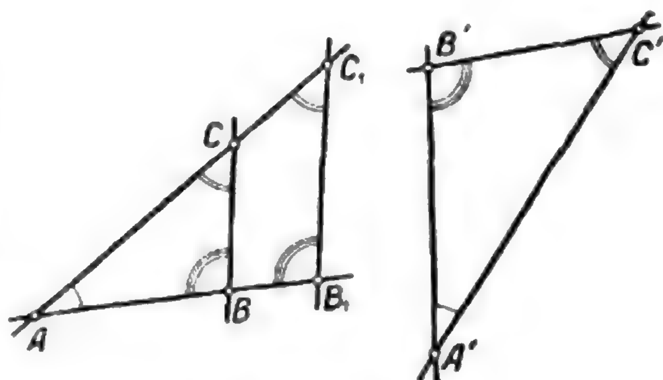


圖 258.

这个公式表明，相似变換是位似变換与移動的積。位似变換不过是相似变換中当移動 W 是恆等变換時的特殊情形。事实上，在这种情形下，在公式(1)裏令 W=1，我們就有：

$$\mathrm{M}=\mathrm{H}.$$

由此可知，为什麼在初等幾何裏常把位似变換叫做**有相似位置的相似变換**。

由相似变換組成的羣 {M}，像我們剛才判明的，它可以歸結为位似变換与移動。因此，我們可以說，度量羣{M}含有反射、位似变換以及它們的積。实際上，移動是反射的積，而位似变換与移動的積給出所有相似变換，也就是羣{M}的变換。

費利克斯克萊茵 (F. Klein)❶ 曾經定义过初等幾何是關於变

❶ 参考歷史簡述 373 頁。

換羣 {M} 与關於这个羣的不变性的研究。他还把羣 {M} 叫做主羣。

以上所有的敍述表明，關於相似圖形的研究在一定的意义上可以解释为射影的。所以用一般形式在射影平面上作这种研究是可能的。

§ 73. 二次曲線的度量性質

在第五章裏曾經建立了二次曲線的射影理論，其中包含關於所有同素变换 {K} 不变的二次曲線性質。其次，在 § 59 裏还研究过二次曲線的仿射性質（二次曲線的仿射分類、中心、共軛直徑等等）。这些性質只是在構成羣 {A} 的仿射同素变换下保持不变。現在我們提出關於二次曲線的这样性質的問題，这些性質只是对於度量同素变换 {M} 是不变的，也就是对於使平面上絕对形不变的同素变换保持不变。二次曲線的这样性質自然叫做度量性質。

在这一章的前幾節裏所作度量概念的射影說明使我們可以用一般射影形式闡述二次曲線度量性質研究的一部分，就像在这一節的 1. 和 2. 裏所包含的。相反地，包含在 3. 和 4. 裏的部分適合於在添加非固有直線的歐幾里得平面上進行研究，因为那裏需要更廣泛的应用度量概念。

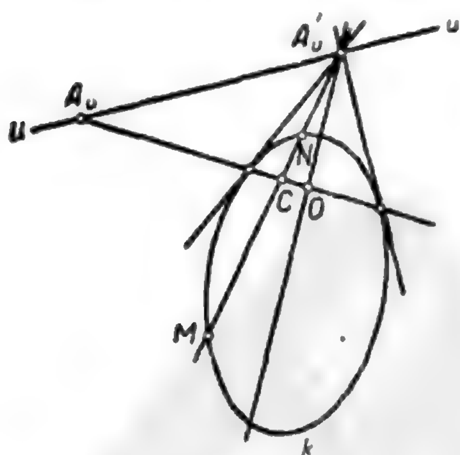


圖 259.

1. 二次曲線的軸。設 u 是平面上的"非固有"直線。我們來研究已知二次曲線 k 在直線 u 上所確定的共軛點的对合(圖259)。設 A_u 和 A_u' 是这个对合的一对对应點。二次曲線 k 的"中心" O 是"非固有"直線 u 的極點。直線 OA_u 和 OA_u' 是曲線 k 的共軛直徑。

这就是說，點A_u是"直徑"OA'_u的極點，點A'_u是"直徑"OA_u的極點。通过點A'_u引任意直線MN。因为直線MN通过"直徑"OA_u的極點A'_u，所以它与这个"直徑"共軛。我們知道，"直徑""平分"与它共軛的直線上的弦(例如，點C平分弦MN)，用射影形式可以表示为等式：

$$(MNA'_uC)=-1.$$

總之，二次曲線k的每个"直徑"OA_u与通过它的極點A'_u的直線都共軛，並且"直徑"的"非固有"點A_u与它的極點A'_u是曲線k在"非固有"直線u上所確定的对合裏的对应點对。

二次曲線的直徑垂直於它的共軛直線，这直徑就叫做曲線的軸。

这就是說，如果"直徑"OA_u垂直於通过它的極點A'_u的直線時，那麼OA_u就是曲線k的軸。因为根据"垂直"的射影定义，通过絕对对合裏对应點对的直線是"垂直的"，所以只有在點A_u和A'_u是"絕对对合"裏对应點的情形下，"直徑"OA_u才是二次曲線的"軸"。因此，求二次曲線軸的問題就变为求已知二次曲線在"非固有"直線上所確定的对合与"絕对"对合的公共对应點对A_u和A'_u的問題。換句話說，問題歸結为求这兩个对合的公共點对。因为"絕对"对合是橢圓型对合，所以根据§32的定理，在"非固有"直線上的兩个对合裏存在一个公共點对。因此，求二次曲線的軸的問題總有解。如果二次曲線k的"中心"O是平面上的"固有"點(曲線k是橢圓，雙曲線)，則問題有兩个解，也就是存在兩个直徑滿足所確定的条件。如果曲線k的"中心"O是"非固有"點(曲線k是拋物線)，則只存在一个直徑是曲線的"軸"。

我們來詳細研究这兩种情形。圖259表示的是第一种情形。曲線的"中心"O是"固有"點。假定A_u和A'_u是曲線k在"非固有"直線上所確定的对合裏或是在"絕对"对合裏都是对应點对。这時

“直徑”OA_u 和 OA'_u 裏的每一个都是二次曲線 k 的軸．事实上，这兩个“直徑”裏的每一个都“垂直”於与它共軛的直線，特别是垂直於第二个直徑．我們來研究“直徑”OA_u——曲線 k 的“軸”．直線 OA_u 的極點是點 A'_u．通过點 A'_u 的任意割線 MN “垂直”於“軸” OA_u。此外，點M和N調和分隔點 C 和 A'_u．这就是說，二次曲線 k 的點M和N關於“軸” OA_u “对称”．因此曲線 k 的“軸”同時也是“对称軸”。上面所有的敍述同時適用於曲線的兩个“軸”（OA_u 和 OA'_u）。至於點 A_u 和 A'_u——兩个对合的公共點——的作圖法，我們从§32的定理知道，可以化为找直線 u 上某个射影对应的二重點。这样的問題在§46裏我們曾經研究过。

如果曲線 k 的“中心” O 是“非固有”點，也就是，它屬於它本身的極線 u，則直線 u 与二次曲線切於點 O（圖260）．这時曲線是“抛物線”，它在“非固有”直線 u 上確定抛物型对合，其中所有的點都对应切點。用字母 A_u 表示切點。用 A'_u 表示在“絕对”对合裏點 A_u 的对应點。这時點对 (A_u, A'_u) 是这兩个对合的对应點。因此作为點 A'_u 極線的“直徑” A_uA 同時也是二次曲線（“抛物線”）的“軸”。事实上，“直徑” A_uA 与通过點 A'_u 的直線共軛，但这些直線垂直於直線 A_uA（抛物線的軸）．特别是，直線 A'_uA 是在“抛物線”的“頂點”A“垂直”於“抛物線”的“軸” A_uA 的切線．“抛物線”的“軸” A_uA 同時也是对称“軸”．从圖上可以看出“抛物線”只有一个“軸”，因为抛物線所有的“直徑”都通过“非固有”點 A_u。

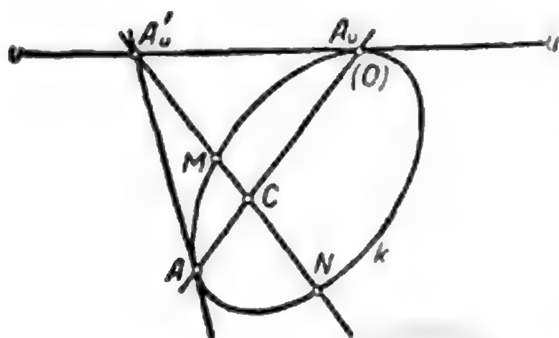


圖 260.

2. 二次曲線的度量特性·圓　我們來研究二次曲線的与它

在非固有直線上所構成的对合有關的度量性質。假定，曲線 k 与非固有直線交於兩个點 P_u 和 Q_u(圖 261)。在这种情形下，曲線叫做"双曲線"(§ 69)。如果點 P_u 和 Q_u 是曲線 k 在"非固有"直線上所構成双曲型对合的二重點，同時还是"絕对"对合裡的对應點，那麼曲線 k 叫做"等边双曲線"。"等边双曲線"的漸近線 OP_u 和 OQ_u 互相"垂直"。这种度量性質在羣 {M} 的同素变换下不破坏，但是在仿射羣裏等边双曲線不能从双曲線類型裏特別劃分出來。

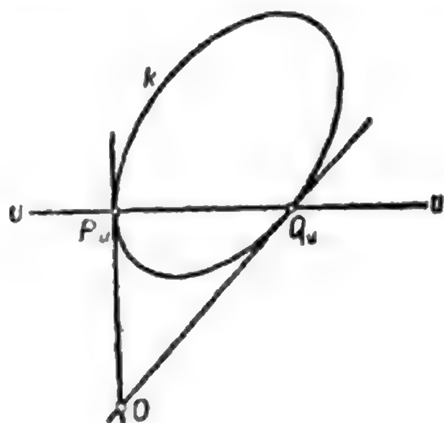


圖 261.

我們看一看，二次曲線 k（橢圓）在"非固有"直線 u 上所確定是橢圓型对合的情形。这个对合能不能与"絕对"对合一致呢？

二次曲線在直線上所確定的对合的給定相当於曲線与直線的兩个交點的給定，这兩个交點是对合的二重點。因此要使二次曲線 k（橢圓）在"非固有"直線上確定"絕对"对合等於給定了曲線的兩个點。因为二次曲線由五个點確定，所以剩下的三个點是自由的並且可以任意选擇，但必須这三个點不在一条直線上而且其中的任何一个也不在"非固有"直線 u 上。

这样，通过平面上滿足这样条件的每三个點，可以作出在"非固有"直線上確定"絕对"对合的二次曲線。这个曲線叫做圓。它屬於"橢圓"一類，因为"絕对"对合是橢圓型的。

我們來研究"圓" k 的兩个共軛"直徑" OA_u 和 OA'_u(圖 262)。因为點 A_u 和 A'_u 在"絕对"对合裏是对應點，所以共軛"直徑" OA_u 和 OA'_u "垂直"。这指的是"圓"的任意一对直徑。根據这个，"圓"可以定义为共軛"直徑"構成"正交"对合的二次曲線。另一方面，我

們已經把"垂直"於它的共軛直線的"直徑"叫做二次曲線的"軸"。由此可知,"圓"的每个"直徑"都是軸。

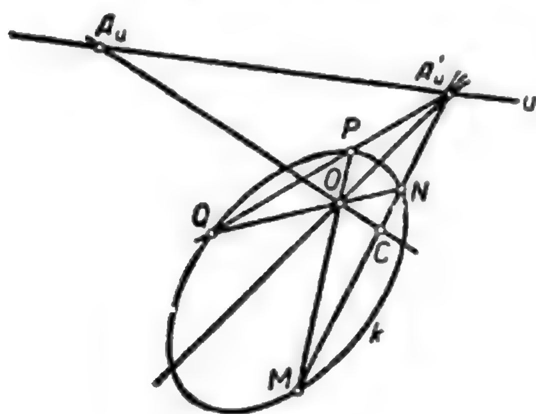


圖 262.

因为二次曲線的"軸"同時也是曲線的"对称軸",所以關於"圓"的任意"直徑"的"反射"總把圓变为它本身,但它的方向变为相反的。

假定,MP 和 NQ 是"圓"的任意兩个"直徑"(圖262)。直線 MN 与"非固有"直線 u 交於點 A'_u。點 A'_u 在"絕对"对合裏对应點 A_u。因此,直線 OA_u 是"軸",它"垂直"於線束 A'_u 裏的共軛直線。

如果实行具有軸 OA_u 的"反射",則點 M 变为与它"对称"的點 N,而"直徑"MP 变为"直徑"NQ。由此断定,"直徑"MP 和 NQ 是"合同"的。因为这兩个"直徑"是任意选取的,所以可以說,"圓"的所有"直徑"是"合同"的。

以"中心" O 与"圓"上的任意點 M 作为端點的線段 OM 叫做"圓"的"半徑"。过"圓"上的任何點引它的"半徑",我們得到的線段彼此是"合同"的。換句話說:

通过"圓""中心"的所有直線被"圓"截成彼此"合同"的線段。

圓的这个重要的度量性質使我們可以在所有的方向上放置測量線段的測尺(§ 74)。

还要注意,繞圓中心 O 的每个"旋轉",把圓变为它本身。事实上,按定义,这样的"旋轉"是反射軸通过點 O 的兩个"反射"的積。但是,我們已經知道,每个这样的"反射"都把"圓"变为它本身。

我們知道，二次曲線与直線的交點是曲線在直線上所確定对合的二重點。因为每个"圓"都在"非固有"直線上確定"絕对"对合，所以：

平面上所有的"圓"都与"非固有"直線交於"絕对"对合的虛二重點。我們把这样虛二重點命名为虛圓點。

我們已經說过，繞"圓"中心"的"旋轉"把圓变为它本身。因此"圓"的"中心"与圓上的任意點可以完全確定这个圓。事实上，"圓"上的每个點可以用繞中心O的"旋轉"由已知點得到。

所有的"圓"都通过平面上的虛"圓"點，因此，確定"圓"位置的必要且充分条件是給出它的三个點（三个點不应該全在一条直線上，並且其中任何一个也不应該在"非固有"直線上）。三个已知點与平面上的兩个虛"圓"點組成確定二次曲線——"圓"的五个點。作为例子我們來解下面的問題：

已知"非固有"直線与它上面的"絕对"对合。試作通过三个已知點A,B,C的"圓"的"中心"（圖263）。

这个問題射影形式的解法与初等幾何裏的普通解法完全類似。用點M平分"弦AB"（作直線AB上"非固有"點的第四調和點）。通过弦AB的"中點"M引直線AB的"垂線"MM'_u（點M'_u在"絕对"对合裏对应點M_u）。同样，通过弦BC的"中點"引直線BC的"垂線"NN'_u。直線MM'_u和NN'_u的交點O就是所求通过點A,B,C的"圓"的"中心"。

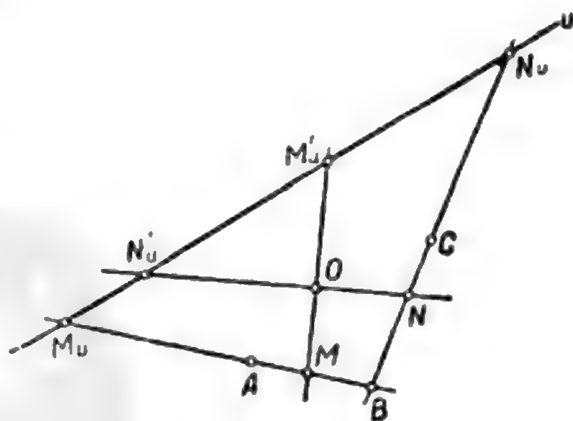


圖 263.

3. 二次曲線的焦點和準線. 以後我們將看到，關於二次曲線

焦點与準線的研究应該歸入度量幾何裏，这种幾何研究不破坏平面上絕对形的同素变換羣以及關於这种羣不变的圖形性質。

我們先証明下面的斯陶特輔助定理：

如果 ABC 是二次曲線 k 的外切三角形，並且點 M 是和一个頂點共軛的點，則联結點 M 与三角形 ABC 另兩个頂點的兩条直線關於曲線 k 共軛。

設有二次曲線 k 的外切三角形 ABC（圖 264）。假定點 M 与三角形的頂點 C 共軛，这就是說，點 M 在點 C 的極線 PQ 上。我們來研究以點 A 和 B 为中心的兩个線束。用下面的方法建立这兩个線束裏直線的对应：使一个線束的每条直線对应第二个線束裏的共軛直線。線束 A 和 B 的这样对应是射影的，因为一个線束（例如，線束 A）与它的直線的極點點列是射影形，同時第二个線束（例如，線束 B）的直線通过对应極點，因而第二个線束与这个極點點列透視。由此斷定，線束 A 和 B 是射影的。不難看出，它們同時还是透視的，因为公共射線 AB 自身对应（切線 AB 的極點是它的切點，所以射線 AB 对应射線 BA）。我們來作線束 A 和 B 的透視軸。为此，只要求出这兩个線束的兩对对应射線就可以。第一个線束的直線 AC 对应第二个線束裏通过边 AC 切點 P 的直線 BP。同样可以發現另外兩条对应射線 BC 和 AQ 交於边 BC 的切點 Q。因此，點 P 和 Q 確定線束 A 和 B 的透視軸。因为點 M 在透視軸上，所以直線 AM 和 BM 是線束 A 和 B 的对应射線，因而它們關於二次曲線 k 共軛（証完）。

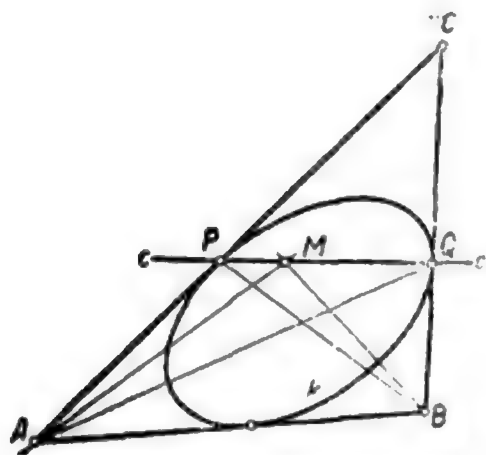


圖 264.

再轉到關於二次曲線焦點的問題上。假定已知平面上的二次曲線 k。这个曲線在每条直線上確定共軛點的对合，並且在每个點確定共軛直線的对合。

定义 二次曲線 k 在平面上的某个點所確定共軛直線的对合是正交对合時，則这个點叫做曲線 k 的焦點。

現在提出如何求二次曲線 k 焦點的問題。这个問題的解法是逐漸地除掉平面上不是已知二次曲線焦點的这样點，最後達到平面上焦點位置的正確的決定。

假定，我們已知二次曲線 k。按焦點的定义，曲線 k 外部的點（也就是从这样的點可以引曲線的兩条切線）以及曲線上的點（通过每个这样的點可以引曲線的一条切線）都不能是曲線 k 的焦點。事实上，在曲線焦點的共軛直線对合是正交对合，因而是橢圓型对合。所以只有曲線 k 內部的點才可以是焦點，因为只有在这样點处共軛直線構成橢圓型对合。

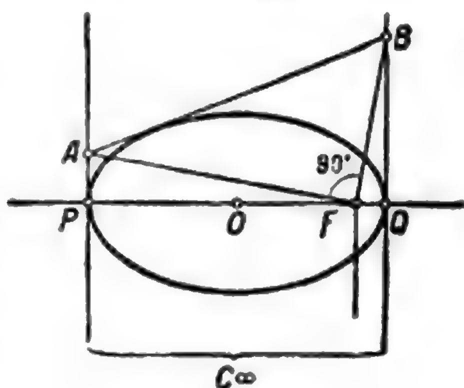


圖 265.

假定點 F 是二次曲線 k 的焦點（圖 265）。通过焦點 F 引直徑 OF。按焦點的定义，与直徑 OF 共軛的直線應該与 OF 垂直。由此斷定直徑 OF 是曲線 k 的軸。

如此，焦點在二次曲線的軸上。

为了更正確的決定二次曲線 k 焦點的位置，我們引用斯陶特的輔助定理。假定 F 是曲線 k 的焦點。於是直徑 OF 是曲線的軸。用 P 和 Q 表示軸 OF 所对應的曲線 k 的頂點（軸 OF 与曲線 k 的交點）。因为 F 是曲線內部的點，所以頂點 P 和 Q 是实點❶。过頂點

❶ 这种情形更詳尽的論証，可以看一下二次曲線上对合的討論（参考格拉沃列夫著射影幾何学 121 頁），並且在那裏可以看到，又曲線的焦點在它的实軸上。

P 和 Q 作切線 PA 和 QB. 这两条切線应該垂直於軸 OF，是軸 OF 的共軛直線。非固有點 C_∞ 是軸 OF(或 PQ)的極點。假定已知曲線 k 的任意切線 AB。於是得到曲線的外切三角形 ABC_∞，並且可以把斯陶特的輔助定理应用到这个三角形上。焦點 F 在三角形 ABC_∞ 的非固有頂點 C_∞ 的極線 PQ 上，並且与这个頂點共軛。根据斯陶特的輔助定理，联結焦點 F 与外切三角形另两个頂點的直線 FA 和 FB 应該關於曲線 k 共軛. 但是，按定义，在焦點的共軛直線構成正交对合。因此就有:

$$FA \perp FB.$$

由此得到下面的焦點性質:

过二次曲線一个軸上的两个頂點作两条切線，它們在另一条切線上截得的線段(AB)在这个軸上的焦點处所对的角是直角。

另一方面，也可以肯定这个命題的逆命題，如果在二次曲線 k 的軸 PQ 上找到了具有上述性質的點 F，則这个點就是曲線 k 的焦點。

事实上，點 F 是共軛直線正交对合的中心，这个对合是由两对共軛而且正交的直線：(FA, FB) 和 (FP, FC_∞) 決定的.

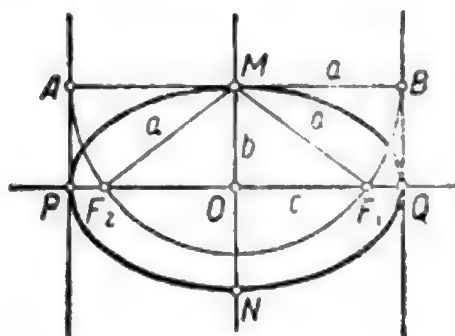


圖 266.

上面得到的二次曲線焦點的性質使我們可以利用簡單的作圖法求得焦點在軸上的位置。我們对於橢圓、双曲線与拋物線分別来進行这种作圖.

在圖 266 裏，設有一个橢圓 $PQMN$，它的軸是直徑 PQ 和 MN. 过橢圓的頂點 P 和 Q 作切線 PA 和 QB，並且过點 M 作第三条切線 AB。这時，切線 AB 平行於 PQ 假定 PQ 是橢圓的長軸 ($PQ=2a$)，MN 是它的短軸 ($MN=2b$)。

以線段 AB 为直徑作圓，这个圓与長軸 PQ 交於兩个點 F_1 和 F_2，並且 $MF_1=MF_2=a$，因为圓的中心 M 到軸 PQ 的距离小於圓的半徑 a(按假設)，所以交點 F_1 和 F_2 是实點並且是橢圓的焦點。事实上，从點 F_1 和 F_2 到切線段 AB 端點的直線構成直角，因而 F_1 和 F_2 都是正交对合的中心，也就是橢圓的焦點

我們來証明，所得到的橢圓焦點与讀者們在平面解析幾何裏所熟悉的焦點是一致的。为此，只要計算从中心 O 到焦點 F_1 和 F_2 的距离就可以。用 C 表示距离 OF_1，从直角三角形 OF_1M 就可以得到：

$$OF_1^2=F_1M^2-OM^2,$$

或

$$c^2=a^2-b^2;\quad c=\sqrt{a^2-b^2}.$$

焦點 F_2 被確定是點 F_1 關於軸 MN 的对称點。所得到的公式表明，點 F_1 和 F_2 就是在解析幾何的意义下橢圓的焦點。

如果利用類似的作法在橢圓的短軸 MN 上求焦點，則須注意，具有中心 P 半徑 $PA=b$ 的圓与軸 MN 不相交。因此在短軸上的焦點是虛的。**橢圓只在長軸上有兩个实焦點。**

圓的情形，应該 $a=b$ 或 $c=o$，也就是焦點与圓的中心重合。这个結論也可以直接推得，就是根据圓的共軛直徑構成正交对合。所以圓的中心是焦點。

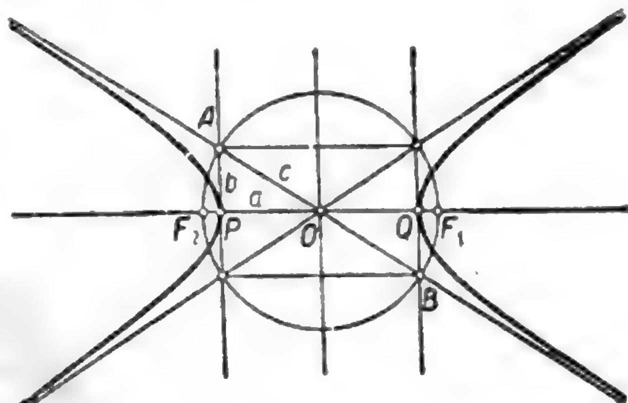


圖 267.

我們回到求双曲線焦點的方法上(圖267)。双曲線的共軛直徑構成双曲型对合，它的二重直線是漸近線。因此双曲線的漸近線应該調和分隔任意一对共軛直徑，特别是双曲

線的兩个軸。因此，漸近線關於軸是对称直線。

我們曾經說过，焦點在双曲線的实軸 PQ 上。它們的作圖法，可以利用过双曲線頂點 P 和 Q 的切線在漸近線上所截取的線段 AB。因为根据上面的証明，由焦點到这个線段端點的直線应該構成直角，於是以線段 AB 为直徑作圓，並且用 F_1 和 F_2 表示它与双曲線实軸 PQ 的交點。點 F_1 和 F_2 是共軛直線的正交对合的中心，也就是双曲線的焦點。用 c 表示焦點距离的一半，也就是 $OF_1=$ $=F_2O=c$；用 a 表示实軸的一半，也就是 $OQ=PO=a$ 並且用 b 表示在頂點的切線段的一半，也就是 $AP=BQ=b$。於是从三角形 OAP 得到：

$$OA^2=PA^2+PO^2,$$

或：

$$c^2=a^2+b^2;\quad c=\sqrt{a^2+b^2}.$$

这就是焦點距离一半的表示式。从它我們看出，所得到的點在以前確立的意义下(在解析幾何裏)也是双曲線的焦點。

圖 268.

我們再轉到拋物線，求在它軸上的焦點(圖 268)。拋物線的一个頂點 Q_∞ 是非固有點。因此，过頂點的兩条切線是直線 PA 与切於拋物線上非固有頂點 Q_∞ 的非固有直線。任意第三条切線 AB_∞ 与上面提到的兩条切線交於點 A 和 B_∞。如果 F 是拋物線的焦點，則射線 FA 应該垂直於射線 FB_∞。但是射線 FB_∞ 平行於直線 AB_∞，因为它們有公共非固有點 $B\infty$。所以有：

$$FA\perp AB\infty.$$

因此，要作拋物線的焦點，先引拋物線的任意一条切線，再从这条切線与过頂點 P 的切線的交點 A 作垂線 AF，AF 与拋物線軸

的交點 F 就是所要求的抛物線焦點。从作圖法可以看出，抛物線只有一个焦點。

应該注意，點 A 是从抛物線焦點 F 向所取的切線所引垂線的垂足。变動垂足的位置，就可以得到下面的命題：

从焦點向抛物線的切線所引垂線的垂足軌跡是过抛物線頂點的切線。

討論了二次曲線焦點的問題，我們再引進二次曲線**準線**的概念。

二次曲線 k 的每个焦點都是某条直線——焦點的極線——所对应的極點。这样的直線叫做二次曲線的**準線**。对於每个焦點都有它的準線，就是焦點的極線。具有兩个焦點的橢圓与双曲線有兩条準線。具有一个焦點的抛物線，有一条準線。

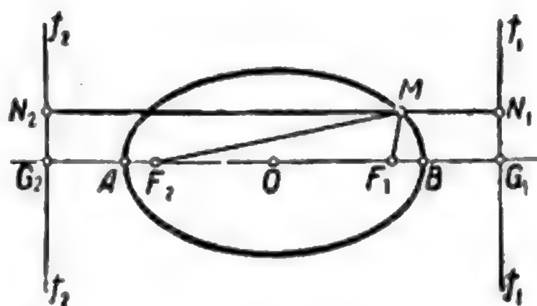


圖 269.

每条準線的位置很容易確定，準線是焦點的極線，它与通过焦點的任意直線共軛。因为焦點在二次曲線的軸上，所以这个焦點的準線与曲線的軸共軛，因而垂直於軸。準線与曲線軸的交點 G_1 应該是焦點 F_1 關於頂點 A 和 B 的第四調和點。

我們首先研究橢圓与双曲線的情形（兩个頂點 A 和 B 都是平面上的固有點）。假定，我們研究焦點 F_1 所对应的準線 f_1（圖269）。这時有：

$$\frac{AF_1}{F_1B}=\frac{AG_1}{BG_1}.$$

如果 O 是曲線的中心，則可以把这个比例式改寫成下面的形

狀:

$$\frac{AO+OF_1}{OB-OF_1}=\frac{AO+OG_1}{OG_1-OB}$$

然後注意到 $AO=OB_1$，則应有

$$\frac{AO+OF_1}{AO-OF_1}=\frac{AO+OG_1}{OG_1-AO}.$$

由此再化簡，我們得到:

$$AO^2=BO^2=OF_1\cdot OG_1 . \tag{1}$$

在这个公式裏，代入 $AO=BO=a$ 和 $OF_1=c$，就有:

$$OG_1=\frac{a^2}{c} . \tag{2}$$

这就是由曲線中心到右準線(左準線也一样)距离的表示式。

双曲線情形，圖有些不同(圖 270)，但是公式(2)仍然成立。

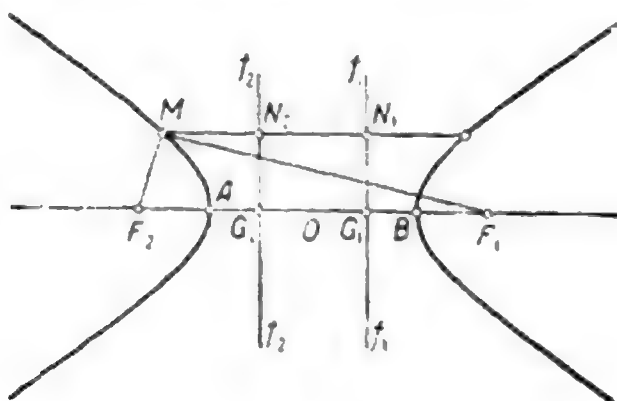


圖 270.

应該注意，对於橢圓

$$OG_1=\frac{a^2}{c}=a\cdot\frac{a}{c}>a,$$

也就是橢圓的準線在它的兩个頂點外側。

对於双曲線有

$$OG_1=\frac{a^2}{c}=a\cdot\frac{a}{c}<a,$$

也就是双曲線的準線在它的兩个頂點之間。

拋物線的準線，情况特别簡單。因为拋物線的一个頂點是非固有點 $B\infty$，所以拋物線的另一个頂點 A(固有頂點)应該平分線段 FG(圖 271)。因此，焦點 F 与準線 f 總与拋物線頂點的距离相等。还要注意，圓的焦點与中心重合，所以圓的準線是非固有直線。

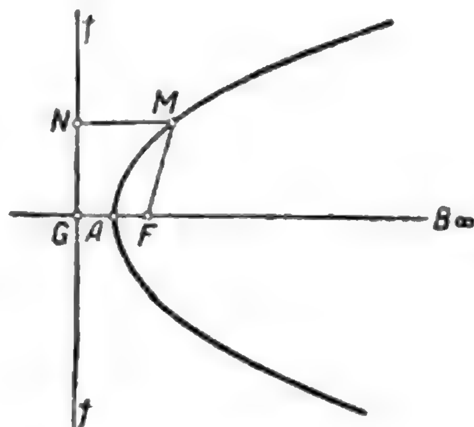


圖 271.

4. 看作軌跡的二次曲線　在这一節裏所討論的二次曲線度量性質使我們可以把这些曲線看作是滿足已知規律的點的軌跡。这使我們可以確定所研究的二次曲線与在解析幾何裏研究过的二次曲線是恆等的。

假定，我們有二次曲線 k，它的焦點 F 对应準線 f(圖 272)。指定曲線 k 的任意兩个點 M 和 M'，並且用 R 表示割線 MM' 与準線 f 的交點。其次在點 M 和 M' 作曲線的切線並且用 P 表示它們的交點。顯然點 P 是直線 MM' 的極點。最後，引直線 PF 与直線 MM' 交於點 Q，再引直線 FM，FM' 和 FR。

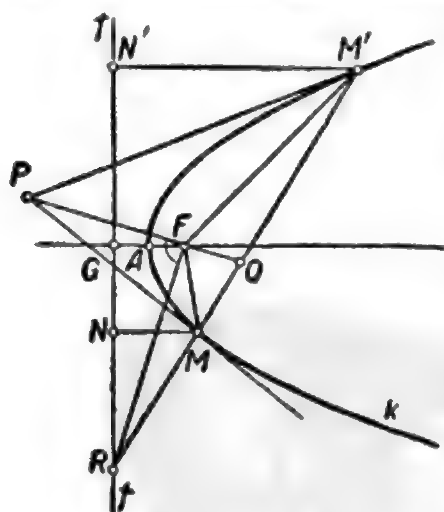


圖 272.

直線 PF 通过直線 MM' 和 NN'(或 f)的極點，它是这兩条直線交點 R 的極線。因此

$$(MM'RQ)=-1.$$

另一方面，直線 FP 和 FR 是在焦點 F 处的正交对合的共軛直線(R 是直線 FP 的極點)。因此

$$FP\perp FR.$$

但是,如果四条調和射線裏有兩条射線互相垂直,則它們是另一对射線所構成的角的平分線。因此直線 FQ 和 FR 平分直線 FM 和 FM' 所構成的角。根据这个就可以寫出

$$\frac{MR}{M'R}=\frac{FM}{FM'}.$$

設 MN 和 $M'N'$ 是从點 M 和 M' 向準線 f 所作的垂線。於是:

$$\frac{MR}{M'R}=\frac{MN}{M'N'}.$$

比較这兩个比例式就得到

$$\frac{FM}{FM'}=\frac{MN}{M'N'},$$

或

$$\frac{FM}{MN}=\frac{FM'}{M'N'}=\text{常數}, \tag{3}$$

也就是自二次曲線上任意點到焦點的距离(FM)与到对应準線的距离(MN)比值一定。

公式(3)所表示的定比,讀者从解析幾何裏早就知道。它叫做二次曲線的离心率。

設想點 M 是二次曲線 k 的頂點,就可以確定离心率的值。在这种情形下,點 M 到焦點与準線的距离比有簡單的表示式。譬如对於橢圓[注意公式(2)]有:

$$e=\frac{FA}{AG}=\frac{OA-OF}{OG-OA}=\frac{a-c}{\frac{a^2}{c}-a}=\frac{c}{a}<1.$$

对於双曲線用類似方法可以得到:

$$e=\frac{FA}{AG}=\frac{OF-OA}{OA-OG}=\frac{c-a}{a-\frac{a^2}{c}}=\frac{c}{a}>1.$$

最後,对於拋物線:

$$e=\frac{FA}{AG}=1.$$

再回到圖 269 設 M 是橢圓的任意點(流動點)，直線 MN_1 垂直於準線 f_1。於是就有：

$$\frac{F_1M}{MN_1}=\frac{F_2M}{MN_2}=e.$$

由此得到：

$$\frac{F_1M+F_2M}{MN_1+MN_2}=e,$$

或：

$$F_1M+F_2M=e\cdot N_2N_1=e\cdot 2\frac{a^2}{c}=2\frac{c}{a}\cdot\frac{a^2}{c}=2a,$$

$$F_1M+F_2M=2a. \tag{4}$$

这就得到了橢圓的已知幾何性質：

橢圓是到兩个定點(焦點)的距离之和是常數($2a$)的點的軌跡。

在双曲線的情形下(圖 270)有：

$$\frac{F_1M}{MN_1}=\frac{F_2M}{MN_2}=e.$$

由此得到：

$$\frac{F_1M-F_2M}{MN_1-MN_2}=e,$$

或：

$$F_1M-F_2M=e\cdot N_2N_1=e\cdot 2\frac{a^2}{c}=2\frac{c}{a}\cdot\frac{a^2}{c}=2a,$$

$$F_1M-F_2M=2a. \tag{5}$$

双曲線是到兩个定點(焦點)的距离之差是常數($2a$)的點的軌跡。

最後，在拋物線的情形下(圖 271)有：

$$\frac{FM}{MN}=e=1,$$

或：

$$FM=MN. \tag{6}$$

拋物線是与一个定點(拋物線的焦點)和一条定直線(拋物線的準線)等距离的點的軌跡

在解析幾何裏可以用二次曲線的这些性質作为定义，並且由

它們導出曲線的最簡方程式。譬如，对於橢圓和双曲線(圖 269 和 270)用曲線的中心 O 作为座标原點，再以曲線的軸作为座标軸，就能導出下面的"标準"方程式：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(\text{橢圓});\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(\text{双曲線}).$$

对於拋物線(圖 271)，用頂點 A 作为座标原點，拋物線的軸作为橫軸，过頂點的切線作为縱軸，就能得到"标準"方程式：

$$y^2=2px.$$

这样，除了解析幾何的方法以外，也可能用綜合方法討論本書敍述的二次曲線。

§ 74. 幾何作圖・斯丹納圖

1. 在 § 46 裏我們曾經談过利用一根直尺可解的作圖問題。但是關於实現这样作圖的条件問題那時还不能研究。現在，圖形的仿射性質和度量性質已經得到了射影的說明，我們在幾何作圖与作圖可能的問題上就可以建立明確的看法。如果用一般的射影形式進行討論，那麼，这样問題就非常明顯而容易理解。

我們首先回憶，在整个敍述过程裏我們曾研究过的用一根直尺能解的一系列的一次問題(§ 46)。但其中沒有仿射性質与度量性質的問題。所講过的那些問題都是在射影平面上的幾何作圖。很明顯，要用射影解法作平面上仿射性質的問題，"非固有"直線应該預先確定。因此，問題的假設应該包含和"非固有"直線位置有關的条件。

2. 平行直線对。假定，在平面上有一对"平行"直線 a 和 b (圖 273)。这兩条直線的交點 P_u 是"非固有"直線 u 上的點。这样，一对"平行"直線就確定"非固有"直線 u 的一个點，但是直線 u 在其它方面是不確定的，也就是它可以是線束 P_u 裏的任意一条

直線。

在这些条件下，利用一根直尺可以解哪一些問題呢？顯然，与“非固有”點 P_u 有關的那些仿射性質的問題是可以解的。我們举幾个例子：

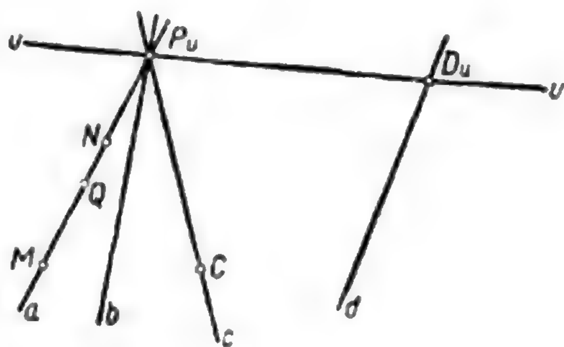


圖 273.

1） **通过已知點 C 引直線平行於已知直線 a**。

事实上，直線 CP_u 就是問題的解。

2） **“平分”線段 MN**。

我們知道，“平分”一个線段就是作“非固有”點 P_u 關於線段端點 M, N 的第四調和點 Q。这样的問題利用一根直尺就可以解（§ 30）。

这个例子表明，假設与求作互换，問題也是可能的。譬如，如果已知直線 a 上的線段 MN 被點 Q“平分”，則直線的“非固有”點 P_u 可以作圖，它就是點 Q 關於點对 M, N 的第四調和點。因此可以作“平行”於直線 a 的直線（b, c）。

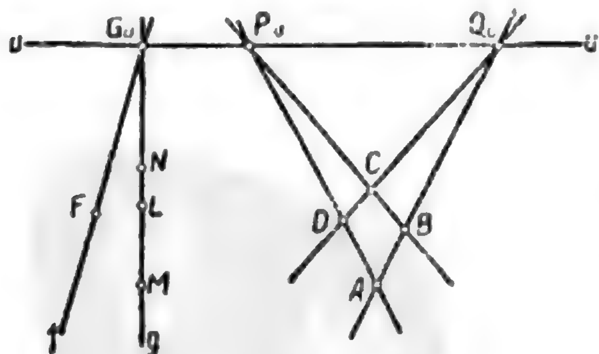


圖 274.

但是應該指出，任意直線 d 的“平行”直線的作圖是不可能的，因为“非固有”直線 u 可以是線束 P_u 的任何射線，因而直線 d 的“非固有”點 D_u 是不確定的。

3. **平行四边形（兩对平行直線）** 假定，已知構成“平行四边形” $ABCD$（圖 274）的兩对“平行”直線。在这种情形下，我們有兩

个"非固有"點 P_u 和 Q_u，它們是平行四边形对应边的交點。这時"非固有"直線 P_uQ_u 完全確定。所以，在射影關係上与"非固有"直線有關的所有問題，利用一根直尺就可以解。我們举幾个例子：

1） 通过點 F 引直線平行於已知直線 g（圖 274）。

因为直線 g 的非固有點 G_u 可以作圖

$$G_u = g \times u,$$

則直線 FG_u 就是問題的解。

2） "平分"任意線段 MN（圖 274）。

要解这个問題，应該作點 G_u 關於點对 M, N 的第四調和點 L。

4. 正方形。"正方形"可以定义为鄰边"垂直"，对角線也"垂直"的"平行四边形"。

設 $ABCD$ 是已知"正方形"（圖 275）。於是对边 AD 和 BC 確定"非固有"點 P_u，边 AB 和 DC 確定"非固有"點 P'_u。因为直線 AD

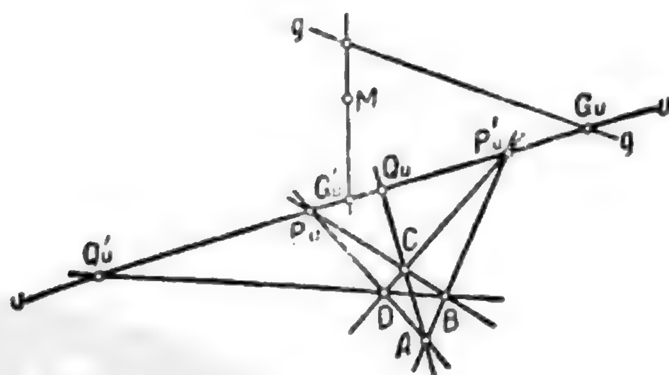


圖 275.

和 AB"垂直"，所以它們的"非固有"點 P_u 和 P'_u 是直線上"絕对"对合裏的对应點。对於对角線 AC 和 BD 的"非固有"點 Q_u 和 Q'_u 也可以这样說。因此，"非固有"直線 u 上的"絕对"对合由兩个对应點对

$$(P_u, P'_u) \text{ 和 } (Q_u, Q'_u)$$

就可以完全確定。

这个事实表明，已知圖形（“正方形”）可以確定平面的“絕对形”。

假定，“正方形” $ABCD$ 是已知的（圖 275）。於是利用一根直尺就可以解按射影形式要知道平面上“絕对形”的那些問題。我們举幾个例子：

1）已知直線 g 与點 M，試作由已知點 M 到已知直線 g 的垂線。

因为“絕对”对合由兩个點对 $[(P_u, P'_u)$ 和 $(Q_u, Q'_u)]$ 確定，所以利用一根直尺可以作已知直線 g 的“非固有”點 G_u 在“絕对”对合裏的对應點 G'_u（§ 33）。这時直線 MG'_u 就是所求的（直線 g 的）“垂線”。事实上，直線 MG'_u 和 g 通过“絕对”对合的对應點。

2）二倍已知角 (a, b)。为了用射影形式給出这个問題，我們在普通度量幾何的条件下來研究它（圖 276）。設 S 是已知角的頂點，b 和 a 是它的边。当二倍已知角 (a, b) 後，我們得到新的直線 c，並且 $\angle(bc)=\angle(ab)$。

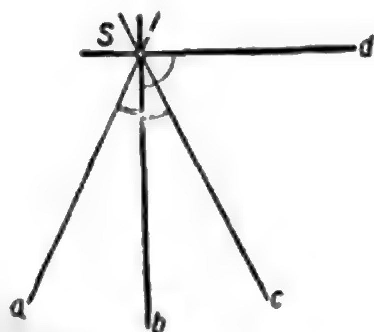


圖 276.

所以，直線 b 是角 (a, c) 的平分線。垂直於 b 的直線 d 是角 (a, c) 的另一个平分線。於是就要有：

$$(acbd)=-1,$$

也就是所要求的直線 c 是直線 a 關於直線 b 和 d 的調和共軛直線。

問題的这个分析說明，如果已知一个正方形，这个問題就可以利用一根直尺作出。事实上，回顧圖 275 的条件，我們看出，整个的作圖只需要引直線。通过角的頂點 S 並且“垂直”於已知直線 b 的直線 d 可以作圖，作法与圖 275 裏“垂線” MG'_u 的作法類似。然後再作三条直線：a, b, d 的第四調和直線 c。整个作圖法用一根

直尺就可以完成。顯然，用類似的方法可以解整數倍已知角的更一般問題。

5. 圓与它的中心(斯丹納作圖法)。假定，已知射影平面上的"圓"k 与它的"中心"O(圖 277)。我們看作"圓"k 的所有點在圖裏已实际作出，也就是已知的"圓"是已經画出的曲線。通过"中心"O 任意引兩个"直徑"AC 和 BD。然後作完全四角形 $ABCD$,它的对角線點是"中心"O 与點 P_u 和 P'_u。P_u 和 P'_u 確定"非固有"直線，就是已知"圓"的"中心"O 的極線。"直徑"OP_u 和 OP'_u 是共軛的(因为三角形 $OP_uP'_u$ 是配極三角形)，因而"互相垂直"。所以"非固有"點 P_u 和 P'_u 在"絕对"对合裏是对应點。因为可以作任意多的共軛"直徑"对，所以在"非固有"直線 u 上的"絕对"对合裏我們將有任意多的对应點对。由此我們断定，已知"圓"与它的"中心"就完全決定了平面上的"絕对形"。

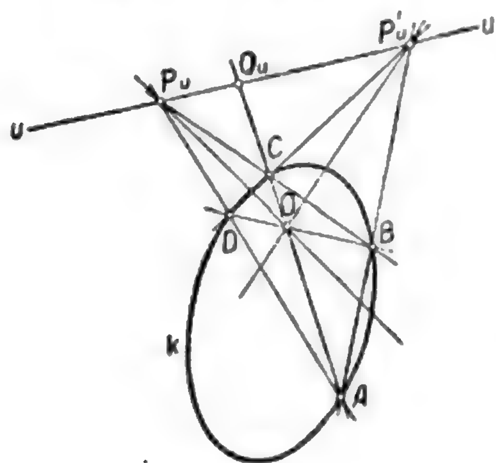


圖 277.

反之，如果不知道已知"圓"的"中心"，則利用一根直尺(也就是作直線)不能把它作出來，因为"中心"是"非固有"直線 u 的極點，而直線 u 的位置还是任意的。

所有这些重要結論都是完全明顯的。

在上面所有的敍述以後，很明顯，已知画好的一个"圓"与它的"中心"時，就能解在已知一个"正方形"的情形下以及在前面的另兩种情形下能解的所有問題。但是斯丹納首先發現，如果已知一个圓与它的中心，則利用一根直尺就可以解只由作直線与圓可解的所有一般作圖問題，也就是用直尺和圓規能解的所有問題。

斯丹納的这个重要結果，可以論述如下：用直尺与圓規完成的每个幾何作圖是由許多作法所組成，在这些作法中，除直尺作法，也就是除作直線以外，还包含用圓規的作法。後面的这些最終歸結为決定交點：1)圓与直線的交點和2)兩个圓的交點。

如果能証明上面提到的兩种作法，当有了一个已知圓与它的中心(斯丹納圓)時，用一根直尺可以完成，那麽斯丹納命題就証明了。自然，这時在作圖裏参与的其他圓由它自己的某些已知条件(例如，中心与半徑)確定，但不能实际被画出(因为圓規的使用已經除掉)。

我們轉到第一种作法，假定已知圓的中心 O 与它的一个點 A，要作这个圓和已知直線 g 的交點(圖 278)。

因为平面上的絕对形可以由已知的斯丹納圓確定，所以利用一根直尺我們就可以作圓 (O, A) 上的任意多个點。为此，我們求圓上的點 B. 它是點 A 關於點对 O, N_∞ 的調和共軛點，这裏 N_∞ 表示直線 OA 的非固有點。其次，通过點 A 引任意直線，並且从點 B 作它的垂線。这个作法用一根直尺就可以完成，因为絕对对合已由斯丹納圓(与圖 277 比較)完全確定。直線 AM 和 BM 的交點 M 屬於圓 (O, A)。如此，就可以作(利用一根直尺)这个圓的任意多个點。在这样情形下，圓与直線 g 交點的作圖就成为在 § 46 裏用最一般形式所研究的問題。在 § 46 裏已經証明，在已知一个画好的二次曲線的条件下，問題用一根直尺就可以解。这样的曲線在現在的情形下就是斯丹納圓。

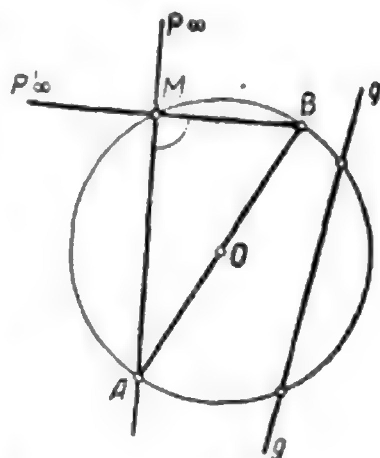


圖 278.

我們再轉到第二种作法(圖 279)。假定，要作兩个圓 (O_1, A_1)

与(O_2, A_2)的交點。如果能作这兩个圓的根軸 PQ，那麼这个問題就歸結为前面的問題。事实上，这時，所要求的點是兩个圓之一与根軸的交點。我們來証明：利用一根直尺可以作根軸的點。联結第一个圓的點 A_1 与第二个圓的點 A_2，求直線 A_1A_2 与已知圓的另兩个交點 A_1' 和 A_2'。我們知道，點 A_1' 和 A_2' 的作法利用一根直尺就可以完成。这样，我們就得到具有根軸 PQ 的圓束在直線 A_1A_2 上構成的对合裏的兩个对应點对(A_1, A_1')与(A_2, A_2')（与§34比較）。在§34裏說明过，圓的根軸 PQ 与直線 A_1A_2 交於对合的中心 O。但是对合的中心 O 可以作圖（用一根直尺），它是直線A_1A_2上非固有點的对应點。这样，就可以作根軸的點 O。然後再选取兩个圓的其他點对代替 A_1A_2（我們知道，可以作圓的任意多个點），求根軸的第二个點❶。因此，問題就歸結为確定一个圓与根軸的交點 P 和 Q。当已知平面上的斯丹納圓時，这样問題利用一根直尺的解法我們已經研究过。这样，斯丹納命題就被証明。

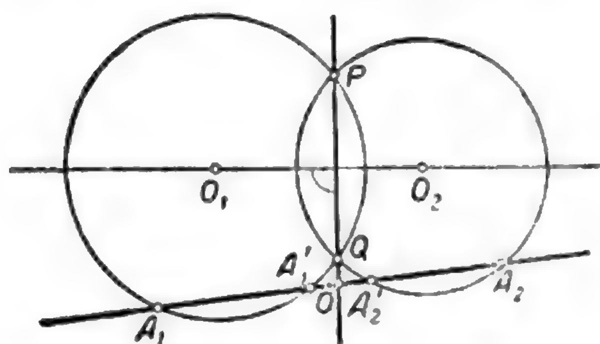


圖 279.

§75. 線段与角的射影度量

在§71裏我們曾經研究过關於圖形合同的理論。把合同看作是在所謂移動的幾何变换下不变的性質。那時用射影形式敘述所有的問題已成为可能。在这样一般射影的描述裏，普通度量幾何是它的特殊情形。"移動"是不变平面上"絕对形"的同素变换。

❶ 也可以用另一种方法：从點 O 向直線 O_1O_2 作垂線。

我們知道，在度量幾何裏，兩點間的距离与兩条直線間的角是“移動”的基本不变量。如果我們要把这些概念歸到度量幾何的射影結構裏，那麼我們就应該給予它們这样的定义，使它們是看作射影变換的“移動”下的不变量，同時还具有普通度量幾何裏同样概念的性質。

1. 首先我們來研究關於線段的測量問題。假定，在平面上固定“非固有”直線 u（圖 280）。此外，已給線段 PQ 作为測量線段的測尺，它的長度等於 1。最後設 AB 是我們要進行測量的已知線段。在直線 AB 上總可以作線段 AC 和測尺線段 PQ“合同”。为此可以採取下面作法：利用直線 PQ 和 QA 的“非固有”點作“平行四边形” $PQAF$。於是線段 FA 就和線段 PQ“合同”。

圖 280.

再解以下問題：確定“圓”(A, F) 与直線 AB 的交點。在兩个交點中选出一个（點 C），使順序 ACD_u 与順序 ABD_u 一致。線段 AC 和測尺線段 PQ“合同”，因此它的“長度”等於 1。

我們來研究後面四个點的交叉比：線段 AB 的端點，測尺點 C 与“非固有”點 D_u。这四个點按 AD_uBC 順序的交叉比叫做線段 AB 的“長度”：

$$\delta_{AB}=(AD_uBC).$$

我們來說明，量 δ_{AB} 是普通度量幾何裏線段長度概念的射影的通形。

如果點 B 与 C 重合，則应有：

$$\delta_{AC}=(AD_uCC)=1.$$

所以，測尺線段的"長度"等於1，这是应該的。

如果點 B 趨近於"非固有"點 D_u，則得到：

$$\delta_{AB}=(AD_uBC)=\frac{(AD_uB)}{(AD_uC)}=\frac{AB}{D_uB(AD_uC)},$$

$$\delta_{AB}\to\infty\ (\text{當 } B\to D_u \text{ 時}).$$

因此，線段的一个端點趨近於"非固有"點時，則線段的"長度"趨近於無限大。

最後証明，用普通度量幾何的規定構成的量 δ_{AB} 与線段 AB 对於測量單位 AC 的度量一致。

实际上，在这些假定下，有：

$$\delta_{AB}=(AD_uBC)=(BCAD_\infty)=\frac{(BCA)}{(BCD_\infty)}=(BCA)=\frac{BA}{CA}=\frac{AB}{AC}.$$

不難斷定，这裏所引進的線段的射影"度量"满足加法法則。这就是說，对於在一条直線上的三个點 A, B 和 C，应有：

$$\delta_{AB}+\delta_{BC}=\delta_{AC}.$$

事实上，總可以作平面的同素变换，把"非固有"直線 u 变为平面的非固有直線，而且使"非固有直線"上的橢圓型对合变为絕对对合(§71，圖254)。这時表示射影形式的線段度量的數 δ_{AB}, δ_{BC} 和 δ_{AC} 不变。同時它們現在該是普通歐幾里得幾何裏一条直線上三个點对应的距离，因而应該满足上面所說的加法法則。

由此看出，交叉比 δ_{AB} 是所要求的表示線段"長度"的射影形式。因为量 δ_{AB} 不但与已知線段的端點 A, B 有關，还与測尺點 C 以及"非固有"點 D_u 有關，所以它在不变更"非固有"直線而且"測尺"線段变为它的"合同"線段的这样同素变换下保持不变。但这样的同素变换都是"移動"。因此可以說，所得到的線段"長度" δ_{AB} 对於所有的"移動"是保持不变的。

2. 再轉到角的度量的射影定义。像对於兩點間的距离射影

一般化時採用四个點的交叉比一样，为了用射影形式來定义角的度量，我們用通过角頂的四条射線的交叉比。

四条射線中的兩条是角的边，而另兩条是所謂**迷向直線**，也就是通过非固有直線上虛圓點的虛直線(§ 73)❶。为了作成这四条直線的交叉比，我們利用座标法。用角的一个边作为笛卡兒直角座标系的軸 OX，角頂作为座标原點 O。第二个边的方程式形狀可以寫成 $y=kx$ (圖 281)。

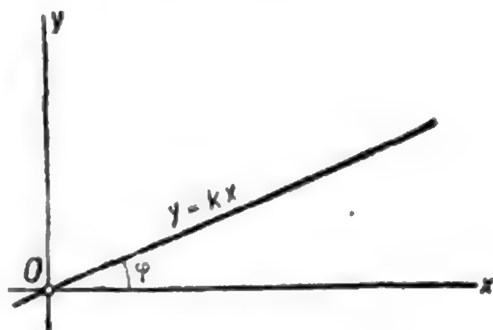


圖 281.

为了求迷向直線的方程式，應該注意，它們通过具有任意半徑的圓 $x^2+y^2=r^2$ 与非固有直線的交點，也就是通过虛圓點。为了確定虛圓點，把圓方程式改寫为齐次座标方程式：

$$x^2+y^2=r^2t^2$$

並且令其中的 $t=0$。於是應有

$$x^2+y^2=0.$$

这个方程式表示一对虛的迷向直線：

$$(x+iy)(x-iy)=0,$$

它們的方程式可以改寫成下面的形狀：

$$y=ix;\ y=-ix.$$

把这兩条直線看作正交对合的二重直線，也可以求出它們的方程式。因为正交对合裏对應直線的角係數与垂直条件相關联，即：

$$k\cdot k'+1=0.$$

於是，对於二重直線，就有：

$$k^2+1=0\ \text{或}\ k^2=-1;\ k=\pm\sqrt{-1}=\pm i.$$

❶ 迷向直線也可以定义为正交对合的虛二重直線。

我們就得到了迷向直線的角係數

这样，我們有通过已知角頂的四条直線：

$$\left.\begin{array}{l} y=kx \\ y=0 \end{array}\right\}\text{角的边；}\quad \left.\begin{array}{l} y=\ \ ix \\ y=-ix \end{array}\right\}\text{迷向直線，}$$

按§35的公式(2)，用它們的角係數作得它們的交叉比：

$$\nu=\frac{k-i}{0-i}:\frac{k+i}{0+i}=-\frac{k-i}{k+i}=\frac{1+ik}{1-ik}.$$

注意角係數 $k=\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$，我們就得到 ν 用已知角 φ 的表示式：

$$\nu=\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\varphi-i\sin\varphi}.$$

应用歐拉公式 $\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}$，則得到：

$$\nu=\frac{e^{i\varphi}}{e^{-i\varphi}}=e^{2i\varphi}.$$

从这个等式，用四条直線的交叉比 ν 可以把角 φ 表示成下面的形狀：

$$\varphi=\frac{1}{2i}\ln\nu.$$

这个公式是拉盖尔(Laguerre)發現的，因此叫做拉盖尔公式。拉盖尔公式給出射影形式的角的度量表示式，也就是，用通过角頂的四条直線(角的边与兩条迷向直線)的交叉比的表示式。因此任意兩个角的相应交叉比相等時，則它們是相等的。

前幾節裏已經証明，移動是把絕对对合变为它自身的同素变換；这時虛圓點(二重點)变为它自身。由此可知，在所有的移動下迷向直線还对应迷向直線。換句話說，交叉比 ν 不变。因此，所得射影形式的角的度量是平面移動群的不变量。

§76. 圓錐截線

假定，在平面 ω 上我們有二次曲線 k（圖282）从空間的任

意點 S（不屬於平面 ω）向这个曲線投射直線。所得投射線的集合叫做二次錐面。點 S 叫做錐面的頂點，曲線 k 叫做錐面的導線，投射線叫做錐面的母線。我們來証明：

二次錐面的每个平面截線是二次曲線。

設 ω' 是截平面。我們知道，从曲線 k 的任意兩个點向这个曲線投射直線可以作成兩个射影線束。設 S_1 和 S_2 是这兩个線束的

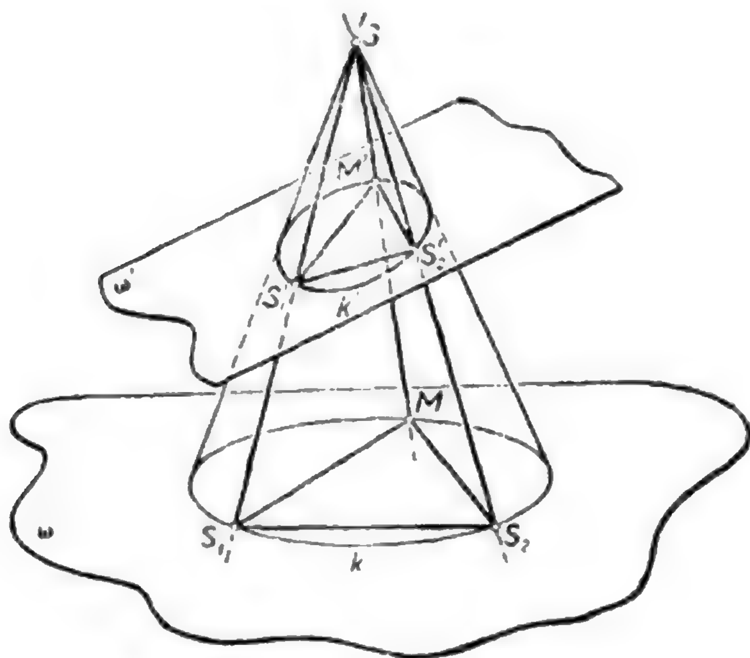


圖 282.

中心。这時 S_1M 和 S_2M 是这兩个線束的对应射線。在利用从中心 S 的中心射影所建立的平面 ω 和 ω' 的透視同素变換裏，曲線 k' 可以看做是曲線 k 对应的曲線。因此射影線束 S_1 和 S_2 对应平面 ω' 上的射影線束 S_1' 和 S_2'。線束 S_1' 和 S_2' 的对应直線交點的軌跡是二次曲線 k'。如此，二次錐面的任意平面截線是二次曲線。特別是，通过錐面頂點 S 的平面与錐面交於兩条直線——錐面的母線。因此，在这种情形下，二次曲線 k' 分解为一对直線。

根据在这一節裏給出的二次錐面定义：

每个二次曲線是二次錐面的平面截線

所以这兩个概念是完全相同的，因而二次曲線常常叫做**圓錐截線**。

通过錐面的頂點 S 作一个平面 ω^* 平行於截平面 ω'，由平面 ω^* 就容易定出圓錐截線的形狀。在平面 ω^* 上二次錐面的母線顯然平行於平面 ω'。平面 ω' 与这些母線交於非固有點，它們也是由平面 ω' 所構成的圓錐截線的非固有點。通过二次錐面頂點的平面可能与錐面交於兩条母線，一条母線或者与它只有一个公共點——錐面的頂點。这三种情形对应平面 ω^* 在 ω 上構成的截痕 s 对於導線（二次曲線 k）而言的各种不同位置。

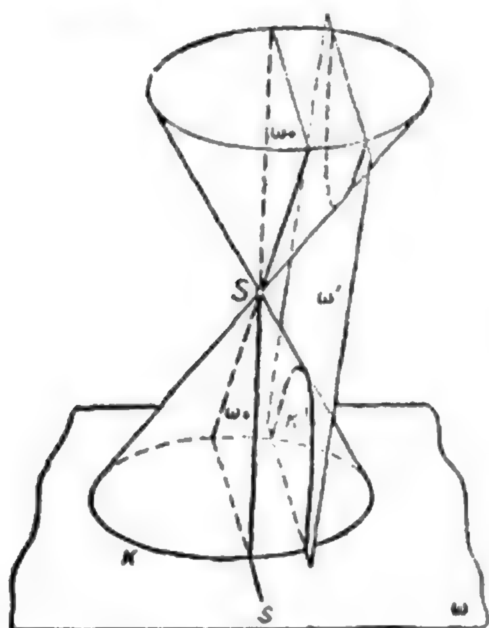


圖 283.

如果直線 s 与曲線 k 交於兩个點（圖 283），則平面 ω^* 与錐面交於平行於平面 ω' 的兩条母線。因此，圓錐截線 k' 有兩个非固有點，k' 是**双曲線**。如果直線 s 与曲線 k 相切（圖 284），則平面 ω^* 与錐面切於平行於平面 ω' 的母線。这時圓錐截線 k' 有

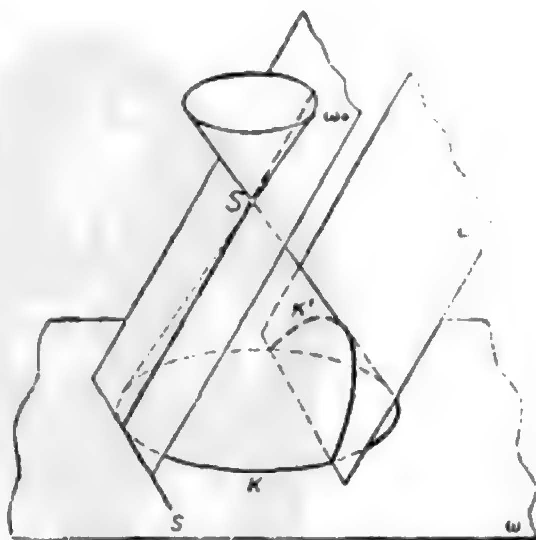


圖 284.

一个非固有點，k' 是**抛物線**

最後，如果平面 ω^* 在平面 ω 上構成的截痕 s 与導線 k 沒有公共點，則顯然不存在平行於平面 ω' 的母線。这就是說，圓錐截線 k' 的所有點都是固有點，而 k' 是**橢圓**(圖 285)。

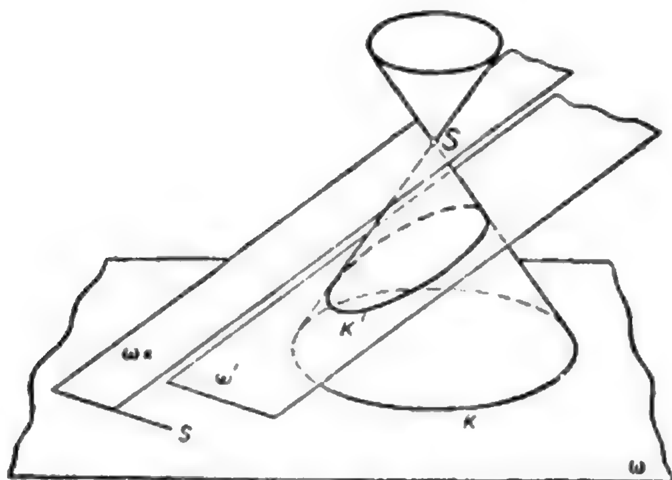


圖 285.

§ 77. 空間射影幾何、仿射幾何及度量幾何

1. 我們曾經研究过平面射影幾何、仿射幾何与度量幾何的羣以及在各种羣的变換下保持不变的圖形性質。在这些簡單論述裏已經確定了，射影幾何研究幾何圖形在場到它自身的任意同素变換下保持不变的那些性質。我們从射影幾何所有同素变換的羣 {K} 再劃分出把非固有直線变为它自身的仿射同素变換从屬羣 {A}。所研究的在这样同素变換下不变的圖形性質，構成仿射幾何的对象。其次从仿射同素变換的羣 {A} 又劃分出不变平面上絕对形的度量同素变換从屬羣 {M}。还說明过，普通度量幾何研究關於羣 {M} 不变的圖形性質，像圖形的相似性質，或只在羣 {M} 的某一部分变換(它們也構成变換羣)下不变的那些圖形性質。像關於移動羣 {W} 不变的性質，也就是關於圖形合同性的研究。

从这种观點來看,具有羣{K}的射影幾何有最普遍的性質，其次是具有羣{A}的仿射幾何，再其次是具羣{M}的相似度量幾何，最後是具羣{W}的移動(合同性研究)度量幾何。後面的一个变换羣總是它前面的从属羣,因此它們可以排列成下面的順序:

$$\{K\}\supset\{A\}\supset\{M\}\supset\{W\}.$$

用類似的方法可以討論空間到它自身的射影变换羣，並且可以作出射影观點下的射影幾何、仿射幾何以及度量幾何的研究。

在这一節裏,講过对於空間拟定的規画構造的某些特點之後，我們也研究这些問題。

2. 空間的每个點变为同一空間的點,每个平面也变为同一空間的平面,並且一个平面上的點变为对应平面上的點,这样空間元素的幾何变换叫做**空間到它自身的同素变换**。在这个定义下，直線(看作屬於某兩个平面的點的軌跡)变为直線（屬於兩个对应平面的點的軌跡)。

从空間到它自身的同素变换的定义，可以導出它的一系列的性質。我們僅講下面一些同素变换的重要性質:

在空間到它自身的同素变换下,每个場变为同素对应場,並且每个把变为同素对应把。事实上,在空間的同素变换下,平面ω变为平面ω'。这時,第一个平面的每个點变为第二个平面的对应點,平面ω的每条直線变为平面ω'的直線。最後接合元素变为接合元素。因此,場ω变为場ω'的变换是同素的。關於把也可作同样的論証。

空間所有同素变换的集合構成变换羣{K}。完全仿照§67裏对於平面上同素变换羣所作的討論,就很容易断定这个事实。

这样，就可以作出**空間射影幾何**，它是研究在空間的同素变换羣{K}下圖形不变性質的一个学科。

3. 把非固有平面变为它自身的空間同素变换叫做**仿射变换**。

从这个定义可知：每个場 ω 在空間的仿射变換下变为仿射对应場 ω'。

直線點列变为仿射对应點列，也就是相似點列。空間所有仿射变換的集合構成变換羣{A}，它是羣{K}的从屬羣。讀者們不难独立地作出相当的論証(比較§68)。

研究在空間仿射变換下圖形不变性質的幾何叫做**仿射幾何**。

4. 为了進行下一步，我們研究把裏直線与平面的正交配極对应。这样的配極对应我們在§58裏曾經遇到过。我們該想到，这种对应是像下面这样定义的：設 Ω 是把的中心。这時屬於把 Ω 的每条直線对应同一个把裏垂直於它的一个平面，每个平面对应垂直於它的一条直線。在§58裏还說明过，正交配極对应(在把 Ω 中)的每个平截影是在截平面上具有虛基本二次曲線的點与直線的配極对应。特别是，在空間的非固有平面上也有这种類型的配極对应，我們把它叫做**絕对配極对应**。非固有平面与它上面的絕对配極对应(具有虛基本二次曲線的)合起來叫做**空間的絕对形**。

我們注意下面的重要情況：設 ω 是任意平面(圖 286)。在它上面任意指定一點 A，並且通过 A 任意引一条直線 a。通过點 A 並且垂直於直線 a 的平面 α，在正交配極对应裏与直線 a 共軛。

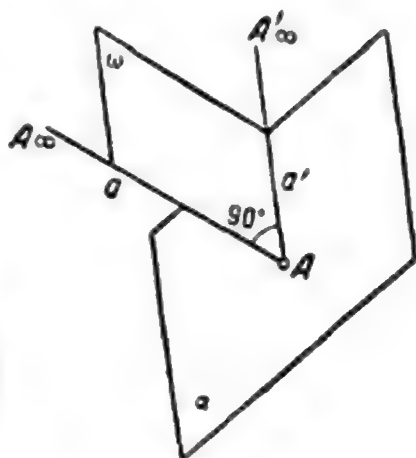


圖 286.

因此平面 α 的非固有直線 α_∞ 在非固有平面上的絕对配極对应裏是直線 a 上非固有點 A_∞ 的極線。我們來研究在平面 ω 的非固有直線 o_∞ 上構成絕对配極对应的共軛點对合。直線 o_∞ 与極線 α_∞ 交於點 A'_∞，點 A'_∞ 是平面 ω 与 α 的交線 a' 上的非固有點。这样，點 A_∞

与 A'_∞ 在絕对配極对应的關係裏是共軛點。另一方面，直線 a' 垂直於直線 a 並且在平面 ω 上。由此斷定，點 A_∞ 与 A'_∞ 在非固有直線 o_∞ 上的絕对对合裏也是对应點。这就說明了絕对配極对应在非固有直線 o_∞ 上構成的共軛點对合与这条直線上的絕对对合一致。簡單些，这个結果可以敍述如下：

空間絕对形在每个固有平面上確定这个平面的絕对形。

5. 現在回到具有度量性質的幾何結構問題上。

我們來研究不变空間絕对形的空間到它自身的同素变换，也就是把非固有平面与这个平面上的絕对配極对应变为它自身的同素变换。这样的变换叫做相似变换。我們來研究相似变换的一些性質。

1)　相似变换把每个平面变为同素相似的平面。

事实上，平面 ω 的非固有直線 a_∞ 变为平面 ω' 的非固有直線 a'_∞（因为是仿射变换）。此外，非固有直線 a_∞ 上的絕对对合变为非固有直線 a'_∞ 上的絕对对合（因为絕对配極对应变为它自身）。但是，在 § 70 裏已經說明过，在这些条件下，平面 ω 到平面 ω' 的同素变换是相似变换。

2)　空間任意兩条直線構成的角的大小不变。

3)　任意兩个線段的比不变。

这兩种情形都可以用下面的方法証明。

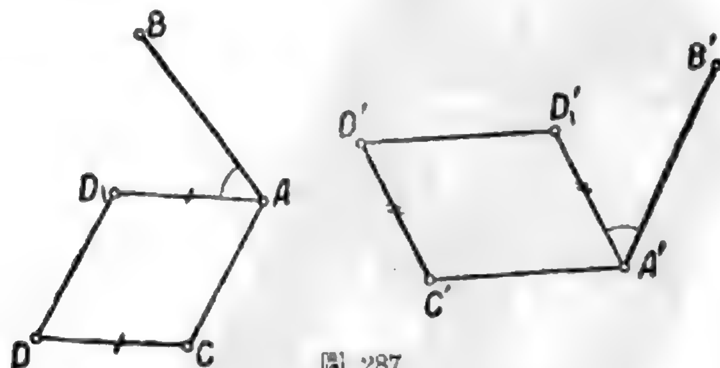


圖 287.

假設有任意兩个線段 AB 和 CD(圖 287)，它們对应線段 $A'B'$ 和 $C'D'$。在點 A 作線段 $AD_1 \# CD$。於是圖形 AD_1DC 是平行四边形。因为相似变換是仿射变換，所以平行四边形 AD_1DC 变为平行四边形 $A'D_1'D'C'$。因此，平面 ABD_1 变为同素相似平面 $A'B'D_1'$。所以应該有:

$$\angle BAD_1 = \angle B'A'D_1'$$

与

$$\frac{AB}{AD_1} = \frac{A'B'}{A'D_1'}, \text{ 或 } \frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}. \qquad \text{(証完)}$$

从上面証明的相似变換的性質 1), 2) 与 3)可知，每个幾何圖形在这种变換下变为它的相似圖形。

所以，相似变換不变圖形的形狀。根据这个事实，这样的变換有時叫做**等形变換**。在这裏容易断定，所有相似变換的集合構成羣，它是仿射变換羣{A}的从屬羣。我們用{M}表示相似变換羣。从相似变換的定义看出，兩个这样变換的積仍是同一集合裏的变換。这样，可以作出**相似度量幾何**，它研究在变換羣{M}下圖形的不变性質。

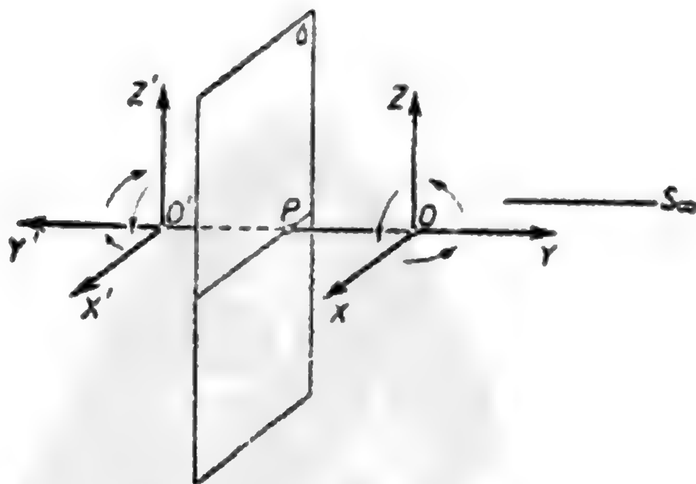


圖 288.

6. **合同性的研究**。为了論述空間圖形的合同概念，我們应該把移動看作是空間到它自身的同素变換。

空間的兩个合同圖形,它們的方向可能不同。假定,我們有兩个直交軸系 $OXYZ$ 和 $O'X'Y'Z'$ (圖 288)。其中第一个叫做右旋系,第二个叫做左旋系。如果我們从上面(也就是从向量 OZ 的一側)看平面 OXY,則向量 OX 和 OY 的順序相当於逆時針旋轉。相反的,从上面(从向量 $O'Z'$ 的一側)观察平面 $O'X'Y'$,則看出向量 $O'X'$ 和 $O'Y'$ 有相反的順序(也就是順時針的)。因此,右旋系和左旋系的方向不同。

假定,我們有合同圖形 F 和 F'。設 O 和 O' 是这兩个圖形的对应點。取點 O 作为座标原點,作右旋軸系 $OXYZ$。用 $O'X'Y'Z'$ 表示圖形 F' 的对应軸系❶。如果軸系 $O'X'Y'Z'$ 也是右旋的,則圖形 F 和 F' 有相同的方向。如果軸系 $O'X'Y'Z'$ 是左旋的,則圖形 F 和 F' 有不同的方向。

現在我們講將兩个合同圖形中的一个变为另一个的变換。这种变換叫做移動。

關於平面的反射或正交对称。从射影的观點來看,这种空間的同素变換是空間透射的特殊情形,就是具有非固有中心 S_∞ 的透射,S_∞ 在絕对配極对应裏与透射平面 σ 上的非固有直線 s_∞ 共軛(圖 288)。对称同時是調和的(对合的)透射,因为每个对应點对 (O, O') 被透射中心 S_∞ 和直線 OO' 与透射平面 σ 的交點 P 所調和分隔。關於平面的反射將已知圖形 F 变为与它合同的圖形 F'。这時圖形的方向变为相反的。

後者从圖 288 就可以断定。这个圖表示右旋軸系 $OXYZ$,經过反射後变为左旋軸系 $O'X'Y'Z'$。

繞固有軸或非固有軸的旋轉。这种变換可以用兩个反射的積來決定。如果構成反射的平面交於固有直線,这時我們有繞固有軸(構成反射的平面的交線)的旋轉。如果構成反射的平面是平行

❶ 这時,当疊置合同圖形 F 和 F' 時,重合的點看作是 F 和 F' 的对应點。

的，則有繞非固有軸的旋轉，或者平移。从射影的观點來看，这兩种变换可以合併为一种，像前面作过的一样。顯然，对於旋轉（繞固有軸或非固有軸）圖形的方向不变。

以後將要看到，为了作關於合同性的研究基礎，只要知道所研究过的三种同素变换（空間的）就可以：反射(S)，旋轉(V)与平移(V_∞)。積 $V_\infty \cdot V$ 与 $S \cdot V_\infty \cdot V$ 叫做移動W。因为 $S \cdot S = S^2 = 1$，就是恆等变換，所以在旋轉与平移裏存在恆等变換：

$$V = S \cdot S = 1, \text{或者 } V_\infty = S \cdot S = 1.$$

因此在移動 W 裏也存在恆等变換：

$$W = V_\infty \cdot V = 1 \cdot 1 = 1.$$

此外，顯然，反射、旋轉与平移也都是移動：

$$W = S \cdot V_\infty \cdot V = S \cdot 1 \cdot 1 = S,$$

$$W = V_\infty \cdot V = 1 \cdot V = V,$$

$$W = V_\infty \cdot V = V_\infty \cdot 1 = V_\infty.$$

7. 首先我們來確定以下移動的重要性質：

移動是不变空間絕对形的空間同素变換。

事实上，反射或平面对称（是仿射变換）把非固有平面变为它自身。此外在反射時，直線与和它垂直的平面变为直線与和它垂直的平面。这就是說，經过反射，絕对配極对应变为它自身。因此，反射不变更空間的絕对形。但是所有的移動只是反射的積，所以它們也不变更空間的絕对形。

其次容易斷定下面命題的正確性：

如果空間裏不在一条直線上的三个固有點是不動點，則只能有一个移動是關於通过不動點的平面的反射。

事实上，任何其他的移動都不保持固有平面（三个不動點確定的平面）不变。特别是，这个命題相当於下面關於合同圖形的命題：

如果圖形的某三个點是固定的，則这个圖形在空間裏只能有兩种可能的对称(關於固定點的平面)位置。

下面的定理对於研究圖形的合同性有重要意义：

達蘭倍尔(D'Alembert)定理 兩个同向的合同圖形有一对重合的对应點時，則繞过重合对应點的軸的一个旋轉就可以把其中一个变为另一个。

用字母 O 表示已知圖形的不動點(一对重合的对应點)並且用字母 A 和 A' 表示这兩个圖形的一对对应點(圖 289)。如果以 O 为中心 OA 为半徑作球面，則它也通过 A'，因为 $OA=OA'$。設 B 和 B' 是合同圖形在球面 (O) 上的另一对对应點[1]。通过點对 A, B 和 A', B' 作大圓弧。必須証明，存在一个旋轉把弧 AB 变为 $A'B'$。

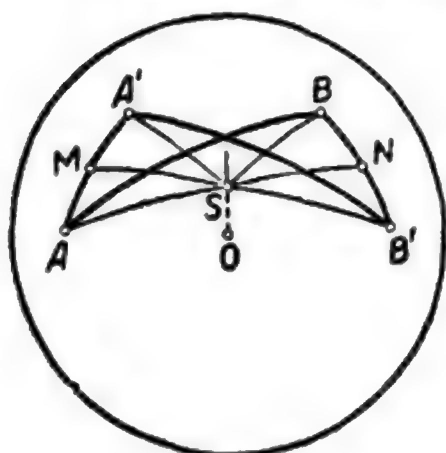


圖 289.

再作大圓 AA' 和 BB'。設 M 和 N 是弧 AA' 和 BB' 的中點。通过點 M 和 N 作大圓，使它們分別垂直於弧 AA' 和 BB'。用 S 表示它們的一个交點(哪一个都可以)。現在我們來証明，繞軸 OS 的旋轉可以使弧 AB 与弧 $A'B'$ 重合。事实上，球面三角形 SAB 和 $SA'B'$ 顯然是合同的，因为它們有三对对应相等的边($SA=SA'$, $SB=SB'$ 与 $AB=A'B'$)。由此得出

$$\angle ASB=\angle A'SB'.$$

但是

$$\angle ASA'=\angle ASB-\angle A'SB,\quad \angle BSB'=\angle A'SB'-\angle A'SB,$$

所以，
$$\angle ASA'=\angle BSB'=\varphi.$$

---

[1] 如果在球面(O)上的點不是这样的點，我們可以把它們歸併到已知圖形裏而不破坏合同性。

因此繞軸 OS 旋轉过角 φ，則弧 AB 与弧 $A'B'$ 重合。於是已知圖形就有了三个重合的點对(點 O 和 A, A' 与 B, B')。因为已經假定圖形的方向是相同的，所以它們位置的对称性已除掉，因此，已知圖形所有的點重合。定理即証明。

8. 現在已經不难証明關於圖形合同研究的基本命題:

任意兩个合同圖形 F 和 F'，利用移動 $\mathrm{V}_\infty\cdot\mathrm{V}$ 或移動 $\mathrm{S}\cdot\mathrm{V}_\infty\cdot\mathrm{V}$❶ 總可以使它們疊合。

事实上，設有兩个合同圖形 F 和 F'(圖 290)。假定，它們是同向的並且設 A 和 A' 是这兩个圖形的对应點。用下面方法組成移動 W。作向量 AA' 確定的平移 V_∞。这个平移把圖形变到有重合对应點对 (A, A') 的位置。作証明達蘭倍尔定理時所作的那样旋轉 V。这時移動 $\mathrm{W}=\mathrm{V}_\infty\cdot\mathrm{V}$ 就使圖形 F 与圖形 F' 疊合。

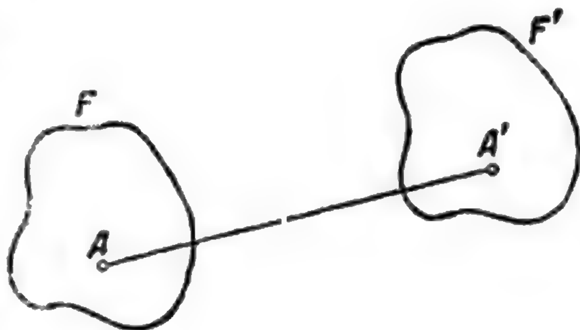


圖 290.

如果已知合同圖形是異向的，那麼作關於任意平面的反射 S。我們得到与圖形 F' 同向的合同圖形 F_1。然後再作前面那样的移動。因此，在第二种情形下，移動 $\mathrm{W}=\mathrm{S}\cdot\mathrm{V}_\infty\cdot\mathrm{V}$ 可以使兩个圖形疊合(証完)。

9. 我們来研究移動 W 的集合。在移動中存在恆等变換:

$$\mathrm{W}=\mathrm{V}_\infty\cdot\mathrm{V}=1\cdot1=1.$$

每个移動把圖形 F 变为与它合同的圖形 F'❷。因此，存在逆

❶ 也就是所謂第一种移動与第二种移動。

❷ 因为移動是反射的積。

移動 W^{-1}。这是把圖形 F' 变为与它合同的圖形 F 的变换。最後，如果接連实行兩个移動 W' 和 W''，則这兩个移動的積还是移動 W'''。事实上，移動 W' 把圖形 F 变为与它合同的圖形 F'，而移動 W'' 把圖形 F' 变为与它(或 F)合同的圖形 F''。因此，根据前面証明的定理，存在有把圖形 F 变为圖形 F'' 的移動 W'''。

从这些理由我們看出，变換W或移動的集合構成羣。这个羣用我們{W}來表示。

10. 对於普通空間度量幾何關於圖形合同的研究，像在前面看到的，如果固定空間的非固有平面与这个平面上的絕对配極对应，就可以作出它的射影結構。

事实上，我們來研究用变換積 $(V_\infty \cdot V)$ 或 $(S \cdot V_\infty \cdot V)$ 定义的空間同素变換W。

这样的变換W叫做**移動**。每个移動，和組成它的那些变換一样，都可以用射影形式來定义，这已經在上面說明过。

如果存在一个移動把圖形 F 变为圖形 F'，我們就把圖形 F' 叫做与圖形 F **合同的圖形**。这样，就逐步完成了合同性研究的射影結構。

因为每个移動 W 是不变空間絕对形的同素变換，所以变換羣{W}是相似羣{M}[1] 的从屬羣。

因此關於圖形合同性的研究，(在变換羣{W}下圖形的不变性質的研究)应該歸於移動羣{W}的度量幾何。

空間射影幾何、仿射幾何以及度量幾何發展的簡述就結束到这裏。

§ 78. 射影形式的罗巴契夫斯基幾何

在§70—72裏曾經說明过可以用射影形式構成普通的歐幾

[1] 这个从屬羣的度量性可以就所有的变換 W 使相似比等於1而劃分出來。

里得幾何。为了这个目的，在射影平面上曾設定所謂"絕对形"。作为絕对形的是在平面上任意取一条直線与它上面任意一个橢圓型对合。这時把直線看作平面上的"非固有"直線，並且把它上面的橢圓型对合看作这个平面上的"絕对"对合，就可以用純粹射影的方法建立普通歐幾里得幾何裏所需要的度量概念。特別是，所研究的那些把上述"絕对形"变为它自身的同素变换，其中我們得到了可以建立圖形合同概念的射影"移動"。就是，在用上面敍述的方法（§71）定义的移動下能疊合的那种圖形叫做合同圖形。

下面將要說明，用類似的方法，如果在射影平面上取適当的"絕对形"，也可以在射影平面上实現非歐幾里得幾何。

譬如取非退化的二次曲線（所謂"卵形"二次曲線）作为"絕对形"，就可以構成罗巴契夫斯基幾何。

設在射影平面上已給出卵形二次曲線 k_u，並且把它作为平面的絕对形。这个曲線把射影平面分为兩个領域：內領域与外領域。內領域的點叫做"固有"點或"实"點。作为平面絕对形的卵形曲線上的點叫做"非固有"點或"無限远"點。最後，外領域的點叫做"理想"點。"固有"點是非歐幾何的點。

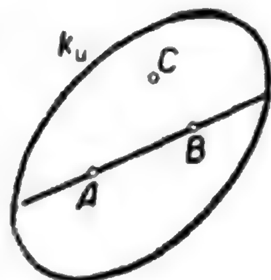


圖 291.

把卵形曲線的弦（在內領域）作为非歐幾何的"直線"。因为这些弦的端點是非固有點，所以非歐幾何的"直線"是開線段。

在上述的（固有）點与直線系裏同樣保持歐幾里得幾何裏的从屬關係、順序關係以及連續性，也就是这些關係在罗巴契夫斯基幾何裏也成立。

譬如，有普通意义的"从屬"概念的，例如："兩个不同的點 A 和 B 確定屬於它們的唯一直線（AB）"。

"總存在三个點 A, B 和 C 不在一条直線上"，等等。

其次，对於罗巴契夫斯基幾何也像对於普通歐幾里得幾何一样可以建立順序關係．直線上的一个點把直線分为兩部分。直線的兩个點 A 和 B 在直線上建立點的順序並且確定線段 AB． 直線把非歐幾里得平面（我們把它理解为卵形曲線 k_u 的内領域）分为兩部分。已知不在这条直線上的一个 C 就確定平面❶一部分。

在所研究的幾何裏，也保持直線上點的連續性与整个非歐幾里得平面的連續性．然而，从平行公理的观點來看，我們發現，如果把交於非固有點或無限远點的兩条直線叫做"平行"線，那麼在所構成的幾何系統裏就有罗巴契夫斯基公理．事实上，設有直線 A_uB_u 与不在它上面的一个點 C（圖 292）。在这种情形下，通过點 C 可以引平行於直線 A_uB_u 的兩条直線，就是直線 CA_u 和 CB_u。这兩条直線把具有中心 C 的線束分为兩部分：1）与直線 A_uB_u 相交的直線，例如直線 CM，和 2）与直線 A_uB_u 不相交的直線，例如 CN_u 就是屬於这一類的直線。

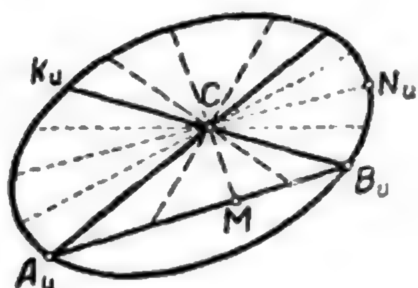


圖 292.

这样，在所研究的幾何系統裏罗巴契夫斯基平行公理成立。

其次証明，在研究的幾何系統裏用射影形式可以实現罗巴契夫斯基度量幾何．为此，仿照在第六章裏構成歐幾里得度量幾何那样我們也引進"移動"的概念．保持平面上絕对形不变，也就是曲線 k_u 不变的同素变換叫做"移動"。这样的射影变換命名为關於已知絕对形的自同構。

特别是，將卵形二次曲線（也就是平面的絕对形）变为它自身的透射变換叫做"反射"．我們回憶，用射影形式作成歐幾里得幾何時，我們也曾將平面絕对形（具有橢圓型对合的非固有直線）变

❶ 確切的說，所謂巴士公理成立、參看 B. 科士甘(B. Костин)著"幾何基礎" § 3)。

为它自身的透射叫做反射。

現在我們來研究在射影平面上以 S 为中心 s 为軸而且具有把卵形曲線(也就是平面的絕对形)变为它自身这样性質的某个透射(圖 293)。

設 a 是通过透射中心 S 且与絕对形交於點 A 和 A' 的某条直線。如果这兩个點不在透射軸上，則它們不是二重點並且其中一个变为另一个。用字母 t 和 t' 表示与曲線 k_u 切於點 A 和 A' 的直線。透射把在 A 點的切線 t 变为在點 A' 的切線 t'。t 和 t' 是透射裏的对应直線，应該交於透射軸 s 上。由此断定，直線 a 的極點 A_1 在透射軸 s 上。因此直線 a 通过透射軸 s 的極點。因为这个結論对於線束 S 裏与平面絕对形相交的每条直線都正確，所以由此得到的結論是透射中心 S 是透射軸 s 的極點。

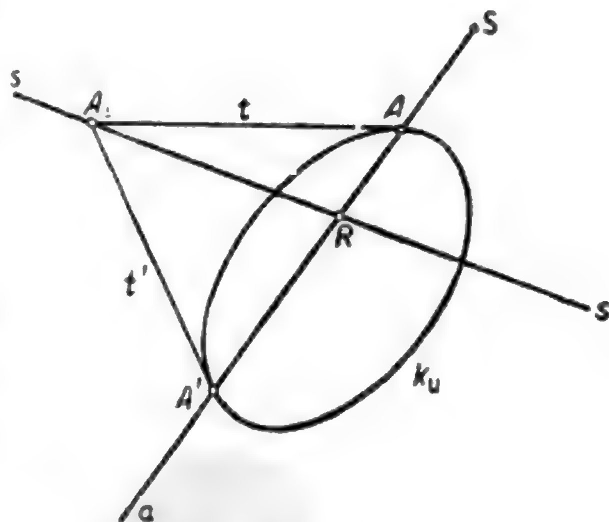


圖 293.

假定，S 与 s 關於絕对曲線 k_u 是相互配極的。在这样情形下，与絕对曲線相交並且屬於線束 S 的每条直線 a 構成四个調和點，一对點是 a 与卵形曲線 k_u 的交點 A, A'，另一对點是 S, R (字母 R 表示这条直線与極線 s 的交點)。因此極點 S (透射中心) 極線 s (透射軸) 与點对 A 与 A' (透射的对应點) 確定把點 A 和 A' 中的一个变为另一个，並且把絕对曲線 k_u 变为它自身的一个对合透射。

这样，我們就建立了把絕对曲線变为它自身的透射，也就是我們叫做"反射"的那种透射，它關於絕对曲線有相互配極的中心与軸。

另一方面，由點与直線做成的每个相互配極元素对是把絕对曲線变为它自身的那样透射的中心与軸，也就是"反射"的中心与軸。

其次，我們可以断定，每个"反射"把卵形曲線內領域的點还变为內領域的點。例如，假設有以 S 为中心 s 为軸的"反射"，它把點 B 变为 B'（圖 294）。

用字母 A 与 A' 表示直線 a 与絕对曲線 k_u 的交點。我們假定，點 B 是固有點，也就是在絕对曲線 k_u 的內部。如果反射中心是固有點，則 $SB \doteq AA'$，因而 $SB' \doteq A'A$。

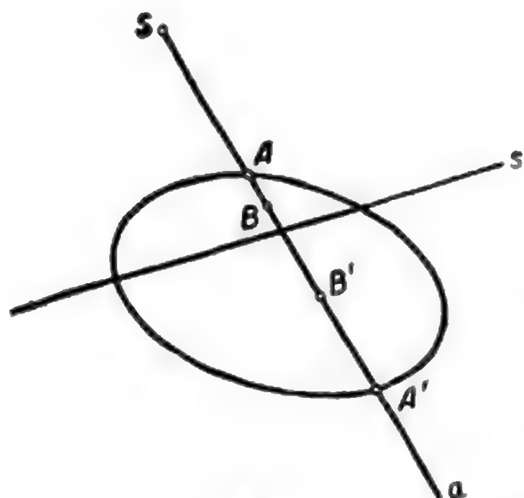


圖 294.

如果"反射"中心是理想點，也就是在曲線 k_u 的外部，則有 $SB \div AA'$，但这時 $SB' \div A'A$。

因此，在所有的情形下，點 B' 都是固有點，也就是在卵形曲線內部。

我們可以証明，把絕对曲線 k_u 变为它自身的每个同素变換都能歸結为有限个"反射"的積。

因此我們可以說，"移動"是由"反射"的乘法所得到的同素变換。

不难断定，"移動"構成变換羣。这个問題的証明和在構成歐幾里得幾何時（§ 71）所作的完全相同。

利用射影的"移動"可以作罗巴契夫斯基幾何的圖形合同的研究。也像普通歐幾里得幾何的情形一样，如果存在一个"移動"把圖形 Φ 变为圖形 Φ′，我們就把圖形 Φ 与 Φ′ 叫做"合同"圖形。

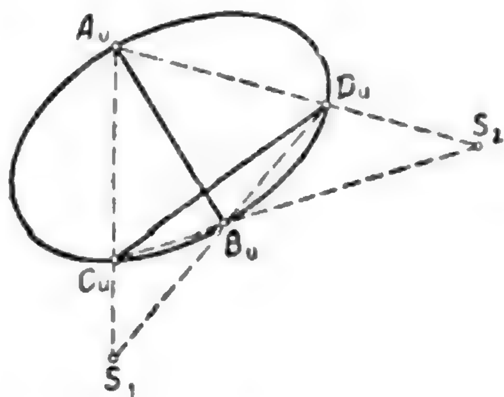


圖 295.

圖形的"合同"概念的性質可以从"移動"的性質導出（比較 § 71）。

要說明罗巴契夫斯基度量幾何的某些特性，必須对射影的"移動"作進一步研究

我們來証明，總存在兩个"反射"它們能把一条已知直線变为任意另一条已知直線，譬如，在圖 295 裏有直線 A_uB_u 和 C_uD_u，則利用"反射"(S_1)和(S_2)可以把其中一条变为另一条 这兩个"移動"的區別在於：第一个"移動"把一条直線上的非固有點 A_u 和 B_u 分别变为另一条上的非固有點 C_u 和 D_u，而第二个"移動"則把第一条直線的非固有點 A_u 和 B_u 分别变为第二条的點 D_u 和 C_u。

其次，我們立刻可以看出，每条直線可以沿着它自身"移動"使这条直線的一个已知點与同一条直線上其他任意一點重合。

例如，假定在直線 $A_uB_u \equiv p$ 上已知點 A 和 B（圖 296）。

我們來証明，總存在一种移動把直線 p 变为它自身並且把點 A 变为點 B。

用字母 P 表示直線 p 關於絕对形 k_u 的極點。

引直線 PA 和 PB。它們与曲線 k_u 的交點分别用字母 C_u，D_u 和 F_u，G_u 表示。

在完全四角形 $C_uD_uF_uG_u$ 裏，对边交點 P，S_1，S_2 是对角線點。因此極點 P 的極線 p 通过點 S_1 和 S_2。

顯然，以 S_1 和 S_2 为中心的每个"反射"都把直線 p 变为它自身(二重直線)。这時，點 A_u 和 B_u 交換位置。此外因为直線 C_uD_u 变为直線 F_uG_u❶，所以點 A 变为點 B。

圖 296.

应該注意，"移動"也可以这样实現，使直線 p 的非固有點 A_u 和 B_u 仍在原位置。为此，只要在進行"反射" S_1(或 S_2)以後再進行以直線 PB 的極點 S 为中心的"反射"就可以。这个"反射"把點 A_u 和 B_u 变回原來的位置並且不变點 $A(\equiv B)$的位置。

这样，移動是由兩个反射的積 $S_1\cdot S$(或 $S_2\cdot S$)組成。

根据合同圖形的定义，在所構成的幾何系統裏，如果存在"移動"把兩个線段之一变为另一个，則这兩个線段看作是合同的。

假定，所說的線段是 AB 和 CD。線段 AB 在直線 A_uB_u 上，並且 $AB_u\div BA_u$。線段 CD 在直線 C_uD_u 上，並且 $CD_u\div DC_u$(圖 297)。

我們來証明，这兩个線段合同的必要且充分的条件是:

$$(ABA_uB_u)=(CDC_uD_u).$$

所說条件的必要性是因为按照合同的定义应該存在一种"移動"能把直線 A_uB_u 变为直線 C_uD_u，而且把線段 AB 变为線段 CD。这時，直線上每四个點的位置順序当然不变。因此当點 A_u 和 B_u

❶ 或者变为直線 G_uF_u(在"反射"S_2的情形下)。

分别与點 C_u 和 D_u 重合時，點 A 必与點 C 重合，而點 B 必与點 D 重合。

因此，实現移動後點的位置用記号(′)表示時，則可以寫为

$$(A'B'A'_uB'_u)=(CDC_uD_u)=(ABA_uB_u).$$

条件的充分性从下面的想法出發就可以証明。設有線段 AB 和 CD 滿足条件：

$$(ABA_uB_u)=(CDC_uD_u).$$

我們來作把直線 A_uB_u 变为直線 C_uD_u 的"反射" S'（圖 297）。

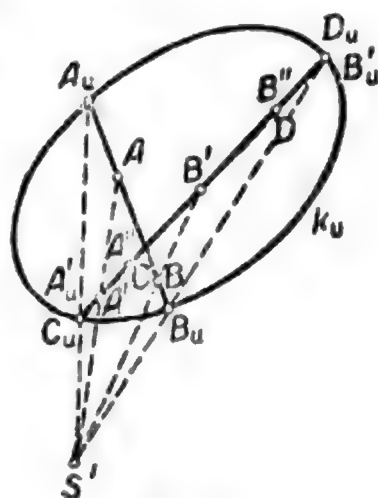


圖 297.

这時將有：

$$(ABA_uB_u)=(A'B'A'_uB'_u)=$$
$$=(A'B'C_uD_u).$$

其次再作直線沿自身的移動，使非固有點 C_u, D_u 不動而點 A' 与點 C 重合。於是有：

$$(A'B'C_uD_u)=(A''B''C_uD_u)=(CB''C_uD_u).$$

由此得到

$$(CB''C_uD_u)=(ABA_uB_u)=(CDC_uD_u),\text{ 或者：} B''\equiv D.$$

这就是說，線段 AB 合同於線段 CD。

罗巴契夫斯基幾何的移動形式。 到現在为止，我們主要是談在所研究的幾何系統裏作为"移動"形式之一的"反射"。在这种情形下"移動"是透射变換，它的中心与軸關於絕对形 k_u 相互配極，而且把絕对形变为它自身。

形式更一般的"移動"是把絕对形 k_u 变为它自身的同素变換。我們來詳細討論在罗巴契夫斯基幾何裏射影"移動"的性質。我們已經闡明过（參考 § 55），不是透射的同素变換不能有多於三个的二重點並且至少總有一个（实）二重點。每个二重點对应一条（關

联的)二重直線，反过來也一样。顯然，"移動"是保持絕对形 k_u 不变的同素变換，对於每个二重點有一条關联的二重直線，是这些點關於絕对形的極線。同样，"移動"的每条二重直線对应它關於絕对形的極點，是關联的二重點。

由上面說过的事实知道，在罗巴契夫斯基幾何裏，不是"反射"的"移動"可能有三种形式。

1) 沿直線的平移。

假定，"移動"的二重直線 p 与絕对形相交於點 Q 和 R。因为"移動"保留絕对形 k_u 与二重直線在原位置，所以它們的公共點 Q 和 R 也仍保留在原位置，也就是，它們都是二重點。第三个二重點是二重直線的極點 P。二重直線 $p \equiv QR$ 与切線 PQ 和 PR 是"移動"的三条二重直線。

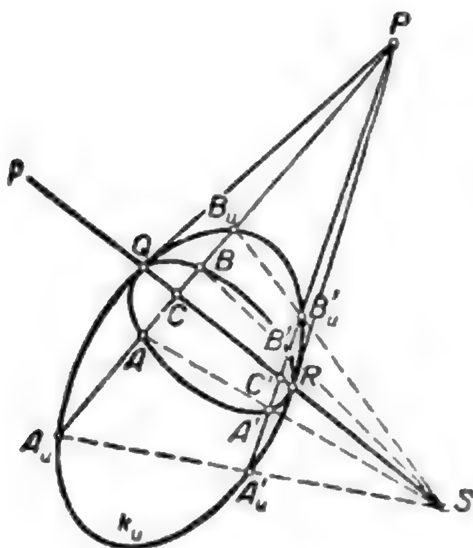


圖 298.

用字母 Π 表示上述的"移動"。設"移動" Π 把點 A 变为點 A' (圖 298)。在这种情形下，直線 PA 变为直線 PA'，並且有：$(ACA_uB_u)=(A'C'A'_uB'_u)$，这裏字母 C 和 C' 表示所提到的兩条直線与二重直線 p 的交點，而字母 A_u, B_u 和 A'_u, B'_u 表示这兩条直線的非固有點。

由此断定，線段 AC 变为与它合同的線段 $A'C'(AC=A'C')$。对於線段 $BC(BC=B'C')$也可以这样說。还要注意，以 P 为中心 p 为軸的"反射"把直線 PC 变为它自身，並且點 A_u 和 B_u 交換位

置。因此，$\angle A_uCQ=\angle B_uCQ$ 並且直線 PC 垂直於直線 p。对於直線 PC' 也可以这样說($PC'\perp p$)。这样，可以說，點 A 和 A' 与直線 p 等距离。

我們來研究距直線 p“等远”的點的軌跡，例如，与直線 p 的“距离”为 CA 的點(假定 A 是这个軌跡上的一个點)。

为了在圖上作出所求的軌跡，我們來研究以 P 为中心 p 为軸且把點 A_u 变为點 A 的透射。設 A'_u 是絕对形 k_u 上的任意一點。我們作它在上述透射裏的对应點。这个點可以找到，它是直線 PA'_u 和 AS 的交點(回憶，直線 $A_uA'_u$ 应該与它的对应直線 AS 交於透射軸 p 上。)因此，有：

$$A'=PA'_u\times AS.$$

另一方面，點 P 是直線 p 的極點，因此直線 p 应該通过直線 $A_uA'_u$ 和 $B_uB'_u$ 的交點。所以这个點与點 S 重合。直線 PC 和 PC'“垂直”於直線 p，並且，此外，由於直線 PC 和 $P'C'$ 上點的透視位置，我們有：

$$(ACA_uB_u)=(A'C'A'_uB'_u).$$

因此可以說，點 A' 距直線 p 与點 A 距直線 p 有同样“距离”，也就是这两个點都屬於所求的軌跡。由此断定，所求軌跡在圖裏是二次曲線，它在以 P 为中心 p 为軸的透射下与絕对形 k_u 相对应。这个曲線在它与軸 p 的交點处与絕对形 k_u 相切。在罗巴契夫斯基幾何裏把它命名为“等距線”。

再回來討論二重直線与絕对形交於點 Q 和 R 的“移動”。現在我們看出，在这种“移動”下每个點都沿着一条“等距線”移動，这条“等距線”通过这个點並且以二重直線 p 作基線。由此就把所研究的“移動”命名为“沿直線 p 的平移”。应該注意，以直線 p 为基線的所有“等距線”，在这样的移動下变为它自身。

2) 繞固有中心的旋轉。

假定,"移動"的二重直線 p 不与絕对形 k_u 相交。因此,有着理想的二重直線和固有二重點 P——二重直線的極點。上述"移動"顯然不能有其他的(実)二重元素。

用字母 V 表示这样的"移動"。假定,移動 V 把點 A 变为點 A'(圖 299)。这時,直線 PA 变为直線 PA' 並且有:

$$(APA_uB_u)=(A'PA'_uB'_u),$$

这裏字母 A_uB_u 和 $A'_uB'_u$ 表示所提到的直線与絕对形 k_u 的非固有交點。

因此,線段 AP 变为与它合同的線段 $A'P$。換句話說,这样"移動"不变和點 P 的距离。點 P 自然可以叫做"移動"的"中心",而这种"移動"是"繞中心 P 的旋轉"。

我們來研究"距點 P 等远"的點的軌跡。这个軌跡可以叫做罗巴契夫斯基平面上的"圓"。在圖上作半徑为 PA 的"圓"。为此我們研究以 P 为中心 p 为軸而且把點 A_u 变为點 A 的透射。設 A'_u 是絕对形 k_u 的任意點,我們來作在上述的透射裏它所对应的點。用字母 Q 表示直線 $A_uA'_u$ 和 $B_uB'_u$ 的交點。點 Q 是四角形 $A_uA'_uB_uB'_u$ 的对角線點,它应該在極線 p 上(参考 §57)。現在不难作出透射 $(P,p;A_u,A)$ 裏點 A'_u 的对应點。它該是直線 PA'_u 和 AQ 的交點。

$$PA'_u\times AQ=A'.$$

我們从直線 PA 和 PA' 上點的透視位置看出,$(APA_uB_u)=$ $=(A'PA'_uB'_u)$,或者 $A'P=AP$。但这就是說,點 A' 是以 P 为中心 AP 为半徑的"圓"上的點。因此,在我們的圖裏这个圓是在透射 $(P,p;A_u,A)$ 裏对应絕对形 k_u 的二次曲線。

从以上說法我們断定,"繞中心的旋轉"把點 A 变为通过點 A 的"圓"上的點。"繞中心 P 的旋轉"把所有的同心"圓"变为它自身。

3）“繞非固有中心的旋轉”

在这种情形下，“移動”的二重直線切於絕对形k_u。因此，二重直線与絕对形的兩个交點与切點重合。同時二重直線的極點P与这些點也重合。因此，这样“移動”的三个二重點都在點P处。

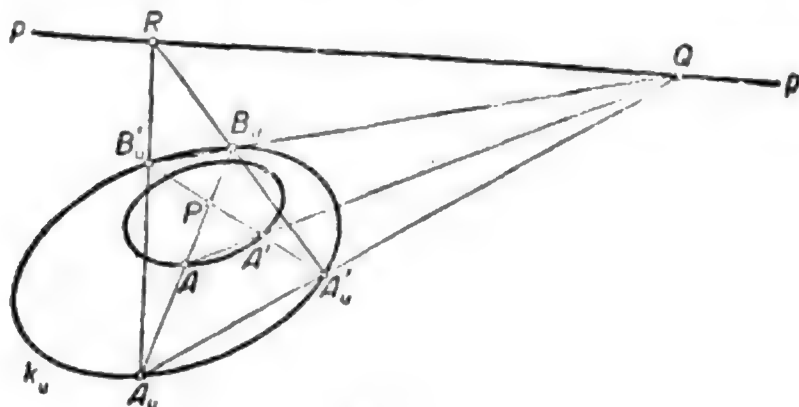


圖 299.

所研究的这种情形可以看做是从圖 299 变到圖 300 的極限情形。这時點B_u，B'_u和P，R重合，而直線$B_uB'_u$与二重直線p重合。結果我們得到圖 300。

也像前面的情形，我們可以用兩种方法來說明圖 300：或者作为把點A变为點A'，並且把點A_u变为點A'_u的“移動”（具有非固有中心P的旋轉）变换，或者作为以P为中心p为軸並且把點A_u变为點A，點A'_u变为A'的透射。在这个透射下絕对曲線k_u变为与絕对形切於點P的二次曲線。在罗巴契夫斯基幾何裏这样的曲線命名为“極限圓”或者“拟圓”。

“具有非固有中心的旋轉”使罗巴契夫斯基平面的所有點沿着以點P为中心的对应“極限圓”移動。“極限圓”在这种“移動”下都是不变曲線。

射影形式的罗巴契夫斯基幾何結構的簡單敘述就結束到这裏。更詳尽的材料在有關这个問題的專門書籍裏可以找到。只須

注意，用射影形式可以实現罗巴契夫斯基幾何，这是它的無矛盾性一种無可非难的証明。

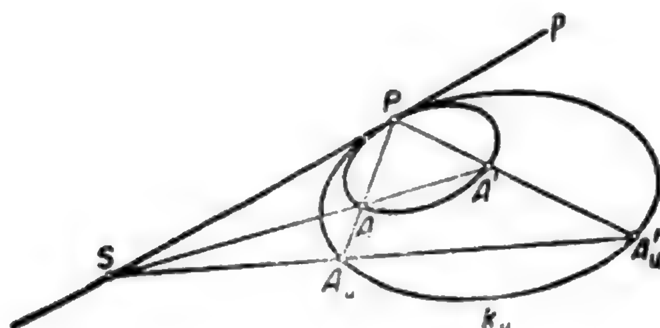


圖 300

必須補充説明的是还有第三种幾何系統，就是所謂黎曼幾何。如果用虛二次曲線作为平面的絕对形，这种幾何就可以用射影形式構成。

据此，就可以用射影形式比較研究这三种幾何系統（歐幾里得幾何、罗巴契夫斯基幾何与黎曼幾何）。这样研究的最主要意义是很明顯的。

習 題

1. 已知平面上“非固有”直線与一个“平行四边形”的三个頂點 A, B, C。試作第四个頂點 D。

2. 已知“非固有”直線与三角形 ABC。試作三角形的“中線”。

3. 已知“非固有”直線，並知道“平行四边形” $ABCD$ 的对角線 AC，对角線 BD 的方向（直線 g）与边 AB 的方向（直線 f）。試作这个“平行四边形”。

4. 已知“非固有”直線与三角形 ABC。試証，三角形兩边中點的“联線”“平行”於第三边。

5. 已知一个二次曲線（已画出）与平面上任意一點 O. 取點 O 作为已知曲線“中心”，試作平面的“非固有”直線。

6. 已知二次曲線的兩个直徑（交於點 O 的線段 AB 和 CD）。試作“非固有”直線。

7．已知平面的"非固有"直線 u 以及二次曲線的"中心" O 与弦 AB。試作与弦 AB"共軛"的直徑的方向。

8．从射影特徵設想，試証双曲線漸近線在它的切線上所截的線段被切點平分。

9．試証任意割線与双曲線及其漸近線的交點所構成的線段總相等。

10．已知"非固有"直線 u，並知道一个二次曲線（已画出）与任意一条直線 g。試作已知曲線上"平行"於 g 的切線。

11．已知"非固有"直線 u 与它上面的"絕对"对合（任意兩对对合的任意兩个对應點对）。試作已知三角形 ABC 的"高"与"垂心"。

12．已知平面的"絕对形"（像在前一問題裏那樣）。此外，更知道"長方形"的对角線 AC 以及边 AB 的方向。試作这个"長方形"。

13．試証：關於二次曲線的"軸"的"反射"把曲線变为它自身。

14．已知平面的"絕对形"与任意線段 AB。試証：使線段 OA 能叠置在線段 OB（这裏 O 是線段 AB 的"中點"）上的同素变換可以看作是"旋轉"的特殊情形。

提示。"旋轉"是軸通过 O 的兩个"反射"的積。

15．已知平面的"絕对形"，更知道"平行四边形" $ABCD$。試利用由適当方法選取的兩个"反射"所組成的"平行"移動使"平行四边形"的兩个对边重合。

16．已知平面的"絕对形"与三角形 ABC。試作在"相似"变換下与已知圖形"相似"的三角形 $A'B'C'$，这个"相似"变換定义为下面兩个变換的積：使直線 AB 对應"平行"直線 $A'B'$（在圖裏已給出）的"透射"与以 AB 为軸的"反射"。

17．試証有公共中心的旋轉構成可換❶羣。

18．試証平移構成羣。

19．試証所有的第一种移動構成羣，然而第二种移動不構成羣。

20．証明透射的集合不構成羣。

提示。利用§52裏的定理，每个同素变換可以用兩个透射的積表示。

21．試証空間的所有球面都通过非固有平面上絕对配極对應的虚基本二次曲線（虚圓）。

提示。利用球面的平截面。

22．試举同素变換的实例，要这种同素变換的積不具有置換性。可以說〈K〉，〈A〉，〈M〉和〈W〉是可換羣嗎？

23．利用直尺与斯丹納的固定圓作正方形 $ABCD$，它的一个边 AB 在圖裏是已知的。

24．試就上題的条件，作等边三角形 ABC，它的边 AB 在圖裏是已知的。

---

❶ 如果羣的任何兩个变換的積与这兩个变換实現的順序無關，这样羣就叫做**可換羣**（或者阿倍尔羣）。

25. 已知平面的"絕对形"与"正方形綫"$ABCD$的边AB，試利用把直線u上的已知"絕对"对合变为非固有直線上絕对对合的透射(§71，289頁)，作"正方形"$ABCD$，使它在上述的透射裏对应正方形$A'B'C'D'$。

26. 在与前一問題類似的条件下，已知一边AB，試作"等边"三角形ABC。

歷史簡述

§ 79. 古代希臘的初等幾何·射影幾何的原始概念

幾何学發展的整个歷史給出这样足資参考的例子，这門学科的物質根源始於人類社会的生活需要(測地術，住宅建築術，繪圖術以及後來的工廠工業、等等)，它達到了高度的理論水平，就產生了自己独特的同時又是很普遍的方法，这种方法还可能再把幾何学更有效地应用到实际問題上

“欲達到这种观念，即以矩形的一边为軸旋轉而得出圓柱形形象的观念，那麼首先应該研究一些現实的矩形与圓柱，即使是極不完全的形体。和其他一切科学一样，數学是从人們的实际需要產生的：就是从地段面積及器物容積的測量，从時間及机械学的計算等產生出來的。和其他一切思維領域中的情形一样，从現实世界抽象出來的法則，在某种發展階段上与現实世界相割裂，並且与之相对立，因此看起來它好像是独立的东西，是从外面來的法則，而世界則应該与它們相適应”(Ф. 恩格斯反杜林論 1952 年俄文版 37 頁)。

还在上古時期，人們生活与生存的許多問題就已要求他們建立最簡單的幾何概念与規律，这些概念与規律發生在周圍世界並且經过抽象的过程逐漸地形成了一門独立的科学——幾何学。

И. В. 斯大林在他的經典著作“馬克思主義與語言學問題”(人民出版社 1953 年版 22 頁)中寫道：“文法在這一方面很像幾何學。幾何學上的定理是把具體對象加以抽象化，把各種對象看成沒有具體性的物體，並在決定它們之間的相互關係的時候，不當成某些

具體對象間的具體關係，而當成一般沒有任何具體性的物體間的相互關係”。

对現实世界周圍对象研究的結果能建立了各种性質的幾何規律，特别是与对幾何物体測量有關的規律或“度量”規律，以及与物体及它們的元素相互排列有關的“位置”規律。最後的这样規律就慢慢形成了幾何学的分枝，这一分枝即所謂“位置幾何学”或“射影幾何学”。

讀者从这个簡述会看到，在人類生存的各个歷史時代，人類在某种表面上描繪周圍物体的意圖对於射影幾何的產生和發展有重大的意义。像画圖和素描比文字的產生，起源更古些。在原始用具簡陋物件上的花样，牆壁和瓶罐上的繪画，塑像以及那些類似的形象都反映了当時人們的日常生活和信仰，也反映了他們審美的願望。

因此很明顯，關於所描繪的客体的點与它在平面上或曲面上的像點間对应的幾何理論，其最初的萌芽与观念是要追溯到远古時代的。这些古代描画逐漸地發展，所發見的法則是構成射影方法的起源，这种方法的跡象在許多希臘数学中已經可以看到。特别是，我們应該指出紀元前三世紀歐幾里得与咖略道尔(Гелиодор)的“光学”以及紀元前 161—126 ❶ 年希巴尔赫 (Hipparchos) 所發現的測地射影法。幾何学在古代希臘時期，無論在实际材料方面，或是在某些理論基礎的奠定方面都有了光輝的發展。在这方面佔特殊顯著地位的是歐幾里得的“幾何原本”。这本書对於整理所有積累起來的幾何材料，並依據一些特别提出的公理、公設和定义來証明这些材料的企圖，已經做到了。至於說到幾何的事实，那麼每个中学生，在初等数学教程裏都听說过畢達哥拉斯 (Pythagoras) 定理(紀元前六世紀)，希包哥拉特 (Hippokrates) 的初月形(紀元

❶ 某些歷史家認为这是多來梅(Ptolomy)發现的。

前五世紀),歐幾里得公設(紀元前三世紀),多來梅定理(紀元前二世紀)等等。

希臘幾何学者最卓越的成就之一,是他們所研究的圓錐截線的初等理論。这些曲線的發現歸功於柏拉圖(Plato)的学生米涅海姆(Менехем,紀元前四世紀),但是他並沒有指出它們是立体幾何上旋轉圓錐的截線❶。專門論述圓錐截線的有阿利斯太格司(Aristarchus,紀元前四世紀),歐幾里得(紀元前三世紀)與阿波罗尼(Appolonius,紀元前250—190年)等所寫的著作。

後者曾寫过八卷"圓錐截線論"。这个著作可以称为"希臘所有幾何学之冠"。其中包含有關於圓錐截線系統的研究,特別是共軛直徑的性質与双曲線的漸近線等等。除了大量新的实际材料外,还应該指出阿波罗尼的著作具有原則上的与方法論上的價值。譬如,他曾最先在同一个圓錐上得出所有三种圓錐截線,他不僅考察了旋轉圓錐,而且还考察了以圓为底的斜圓錐。此外,他还認为圓錐是由兩个半圓錐所組成。最後,这些曲線的名称:橢圓,拋物線与双曲線也是阿波罗尼起的,虽然这些名称有的也被其他希臘數学者使用过。

应該指出,阿波罗尼是已經知道完全四角形的調和性質的。

在古代希臘的丰富遺產裏,我們还应該指出对於幾何在射影綜合方向上進一步發展有利的那些著作与个別事实。屬於这方面的,主要是巴普斯的著作(紀元後三世紀)与謝林(Серен)和美奈劳斯(Menelaus,紀元後一世紀)著作的一部分。前者的著作名为"數学全集",共八卷。但是,保存到現在的只有最後的六卷与第二卷的極少片段。在这个著作中已經有了对合概念的最初萌芽,特別是,有了到後來很晚才被笛沙格發現的三对點的对合關係。巴普斯还証明了關於圓錐截線內接六角形的巴斯加定理的特殊情形,

❶ 參考查哈拉斯(Цахарнас)著射影幾何引論,1922。

就是当圓錐曲線是直線对的情形。塞林所寫的著作是“關於圓柱和圓錐的截線”。他得到了一个定理，这个定理在現代数学中敍述成：“用直線截調和線束，則在直線上得到調和點列”。

關於三角形截線的美奈劳斯定理，到現代还列在初等幾何、解析幾何和射影幾何裏❶。

§ 80. 文藝復兴時期關於透視的研究

虽然古代希臘和罗馬在透視方面得到了一些成就，但是它的極盛時期是文藝復兴時期，並且与繪圖史上的光輝時期是同時的。

譬如，德尤拉（A. Дюрер, 1471—1528）寫了專門研究透視法則的著作，1525 年在紐倫堡出版。在这个著作裏他研究了从視點到物体各點的視線的截面（繪圖面），並且利用了正射影法（平面圖与垂直射影）。

德尤拉为了構成深度測尺还应用了“距离點”。在他以後，許多德國画家寫了關於透視法的著作。

在十五世紀前半期，意大利的許多藝術家和建築家曾把透視法应用到它們的藝術上。

天才的建築家和学者阿倍尔特（Альберт, 1402—1472）最先寫出關於透視的書籍（推測大約在 1446 年）。該書是用拉丁文寫的，出版於 1511 年，書名为“De Pictura”。

在阿倍尔特的这个著作裏，它利用有很大实际意义的測表描寫了透視作圖的方法。他还把应該与正方形对角線一致的測尺點应用在它的作法裏。由於他屢次提到任何完善說法对於驟然看不懂祂的作圖正確性的那些人們都無济於事，他就沒有作出測尺點这个性質的証明。

❶ 美奈劳斯定理对於大圓交成的球面三角形也成立。

多才多藝的達·達·文奇(1452—1519)在透視領域裏也顯示了他的才能。文奇寫了以"Trattato della Pittura"为題的關於透視法則的系統敍述。这在当時來說是很卓越的。

順便提一下,在这个著作中他作出了縮尺法的經驗規則。

意大利繪画術的偉大匠師們,像拉斐尔(Рафаэль),米克尔-安齐劳(Микель-Анджело),齐眞(Тициан),威倫茲(Веронезе)和其他等人都把透視法运用在自己的技巧中。同時拉斐尔和米克尔-安齐劳是特別嚴格遵循这些法則的,但是,像威倫茲就不太受这些法則的束縛。譬如,在他的画"Брак В кане"中有七个視點和五条水平線。

在科学方面有特殊價値的,是格为德·屋巴利基(Гвидо Убальди)在1600年所寫的關於透視的著作。在这个著作中探討了關於聚集點的一般理論,屋巴利基把它叫做Puncti concursi;作出23个透視作圖法則並且作到建立同素变换概念的第一步。屋巴利基还研究了按照圖形的映像來確定圖形的大小法,創立了画法幾何一个分枝。这个分枝由於照像術的發明而得到独立的並且此後被称为"照相測量術"。从所說的这些我們可以看到屋巴利基著作的巨大意义,但是他对於凸透視,陰影作法等問題的研究,更增加了这著作的價値。

至於这个時期透視在俄國繪画術中的应用,从16世紀文稿中的一些插画來推斷,可知在作圖時已有初步的透視理論。透視射影的發展在俄國繪画術中走过独立的道路。18世紀俄國的画家什巴諾夫(Щибанов),費耳索夫(Фирсов),阿列克謝夫(Алексеев)等等已經掌握了透視的理論並且以更大的技巧应用了它。

在文藝復兴時期繪画術和建築術的燦爛發展激起了对於透視問題的巨大注意,並且在这种情况下它推進了对理論的研究,这些成果的作用很快的影響到幾何学。

§ 81. 射影幾何的創立時期

透視問題是推廣到射影幾何的根源並且奠定了射影幾何的基礎。

在 1636 年笛沙格寫了标題为"用透視表示对象的一般方法"的一本小書(公元 1636 巴黎出版)。在这个著作裏，为了構成透視測尺他第一次採用了座标法。他用繪圖面与对象面的交線作为一个軸，用在繪圖面上垂直於对象面的直線作为第二个軸，用在对象面上垂直於繪圖面的直線作为第三个軸。因此，繪圖面与对象面是兩个座标面，而第三个座标面与它們垂直。在座标軸上給出寬度、高度和深度的測尺，而深度用透視測尺給出❶。

笛沙格的另一个著作是研究圓錐与平面相交的問題("Brouillon project d'une atteinte aux evenements des rencontres d'une cone avec un plan", 1639)。尚，曾失傳。1845 年法國幾何学者及數学史学者查理(Chasles)偶然在巴黎的一个舊書店裏得到了帶有这个重要著作原稿的抄本。

在那裏笛沙格第一次把圓錐截線看做是圓的透視形。由此所有關於圓錐截線的研究採用了特別簡潔的形式，所有三种曲線(橢圓，拋物線和双曲線)都包括在一种方法中。在利用透視作为研究的一般方法時，笛沙格就不得不研究所謂空間無限远元素的問題。他認为，所有平行線都相交於所謂無限远的點。由此笛沙格奠定了空間射影概念的基礎(完全的射影空間)，並且使研究射影变換成为可能。

最後，笛沙格工作的第三个重要成果是關於點列裏點的对合

---

❶ 很有趣地，这个著作引起了很多抨擊，在对它的回答裏笛沙格宣告，誰能在他的方法裏找到錯誤，他支給 100 个西班牙幣，誰能提出較好的方法，他支給 1000 个法郎。

对应的研究。这裏的術語"对合"也是笛沙格从植物学辭典中取得的❶。他把擺列點列的直線叫做"樹"把線段的起點叫做"樹幹"而把線段本身叫做"樹枝"等等。

笛沙格研究了直線上點对的对合位置，並且証明了關於通过四个不動中心的圓錐截線束与直線相交得到对合的極一般的定理❷。

最後，有必要提到本書 § 23 中詳細分析过的關於透射三角形的笛沙格定理。这个定理对於幾何学的重大意义甚至於在这本簡單的書裏也能看到。

笛沙格的工作打下了射影幾何的科学基礎，因此正確地說应当把他看作是这个学科的創始者。"關於射影幾何的原始观念是產生在技術作坊裏。里昂的笛沙格——新綜合幾何的始祖——曾是一个建築師和工程師，並且是著名哲学家和數学家笛卡兒❸的親密朋友"。

另一个著名的法國幾何学家巴斯加的著作發表为廣告的形式，其中应該注意到他關於圓錐截線的主要著作。巴斯加把他第一个实驗叫做"圓錐截線研究的实驗"（公元 1649 巴黎）。这是他 16 歲的時候寫的。

在这个著名的著作裏已經作出關於圓錐截線內接六角形的巴斯加定理。巴斯加曾打算研究完整的圓錐截線理論，並且据查理說，他从他的定理（他称它为神秘的六角形—Hexagramma mysticum）得到 400 个推論。这个定理对於圓錐截線的理論有很大的價值，因为它確定了圓錐截線上六个點的射影相關性。如果把这些點中的五个看做是已知的，則它們就確定了这个圓錐截線，並且

❶ 字句"对合"表示嫩葉捲縮未放的狀态。

❷ 这个定理的特殊情形是圓束構成的对合。

❸ 查哈拉斯（Цахарпас）著"射影幾何引論"9 頁。

任意六个點("流動的")必須滿足由巴斯加定理所表明的条件。因此这个定理可以看作是圓錐截線方程式的一种"射影等值形"。

必須指出，这个時期数学家的注意力曾被吸引到研究幾何問題的新方法上。这就是那主要由費尔馬(1590—1663)和笛卡兒(1596—1650)所發明的解析幾何学。因而幾何学往後在射影綜合方面的發展有些遲緩。但是在笛沙格和巴斯加死後(後者死於1662年，笛沙格死在他前一年)一百五十年，在射影幾何的領域裏開始了下面就要談到的新的創造時期。对於射影幾何來說起特別出色作用的是法國幾何学者彭斯來(1788—1867)的著作。彭斯來的主要著作是"論圖形的射影性質，供研究画法幾何的应用和地面幾何測量者的用書"(1822)

彭斯來在他被俄國俘虜在薩拉多夫時期(由1813年春到1814年秋)所完成的这个著作裏，依笛沙格和巴斯加那样地，对於圖形幾何性質的研究利用了中心射影法或圓錐射影法。这样就使研究圓錐截線的問題变为研究圓的問題，研究四边形的問題变为研究平行四边形的問題等等。彭斯來从投射法和截断法出發，研究了在这些作法下保持不变的那些圖形性質，也就是射影性質。無論是絵圖射影或者是度量射影的性質都与它們有關。後者与彭斯來对於四个調和點(就是交叉比等於−1的情形)所研究过的所謂"交叉比"的概念有關。

彭斯來曾研究过空間透射，並且得到看作平行平面交線的無限远直線的概念。

最後，彭斯來还研究过關於點和直線配極对应的理論，並且还把它用來研究圖形的性質。

關於配極的發現和这个術語❶的引用，吉尔剛(Gergonne)也和彭斯來同样要分享荣譽。吉尔剛在他的研究裏应用过对偶原

❶ 差不多与数学家謝魯瓦(Сервуа)(1810)同時引用的。

理。这个原理是新幾何学的一个最有效的方法。

正是由於这个方法布利安桑(1906)才得到了他的關於二次曲線外切六边形的定理,它是巴斯加定理的对偶定理。还应該注意,術語"調和对"是布利安桑定的。

我們还要提到法國幾何学者卡尔諾 (Carnot) 的"位置幾何"(1803),在这本書裏他引進了完全四边形的概念。

这样一來,就奠定了成为独立学科的新幾何学或射影幾何的基礎。

还应当提出的是从法國偉大幾何学者蒙日(Monge)的主要方法建立起來的画法幾何。

蒙日是法國大革命時代的人,曾有一个時期担任过海軍部長並且还是有名的綜合工藝学校的創始人。由於技術的發展以及需要幾何繪圖的那些实际問題,在兩个平面上的正射影法就被引用到实际生活裏。建築学、营造学、截石法、日規製作等各种問題就是这样。蒙日的方法一直到現代仍然是工程技術製圖的基本方法。

因为按这个方法構成的平面圖表現空間的实际關係,所以它是許多幾何定理的根源。在蒙日得到了嚴密、完整、独立、而又極特殊的画法幾何方法之後,画法幾何就不僅是可以看作具有很实际意义的学科,而且还可以看作具有理論價值的独立学科。關於这一點查理說过("幾何学史"240頁):画法幾何出現之後,不論是在概念上或在方法上都立刻擴大起來,使人們对純幾何(是頌揚歐幾里得,阿基米德,阿波罗尼的学科,是迦里略,刻普拉,巴斯加,惠更斯發現自然規律時掌握的唯一工具,最後是產生牛頓的永垂不朽的著作"Principia"的学科)忽視將近一世紀之久。

麥俾烏斯(Mobius)的著作"重心的計算"(萊比錫1827年版)对於射影幾何的發展具有重要意义。其中關於圖形射影性質的研

究得到了完全的推廣。譬如麥僥烏斯証明了一直線上四个點交叉比的射影性。他得到了平面上和空間裏的一一对应（或一对一变換）的概念，特別是他研究的同素变換，就是把點变为點直線变为直線的变換。同時他还研究了異素变換，就是把點变为直線直線变为點的变換。例如關於已知圓錐截線，點变为直線而直線变为點的配極变換就是这种变換。

这样，麥僥烏斯就以完全普遍的方式証明了射影概念就是場的一一对应關係。

麥僥烏斯的著作問世以後不久，斯丹諾（1769—1863）的經典著作以一个相当長的書名發表了，書名的開头是："一个幾何圖形与另一个幾何圖形相關性的系統敘述……"（柏林 1832 年版）。

在那裏曾寫出利用兩个射影線束構成圓錐截線的重要定理（正定理和逆定理），因之第一次得到了只与線束的交叉比等式有關而与空間射影方法無關的圓錐截線定义。斯丹諾思想的發展給出了二次曲線，二次曲面，空間三次曲線，三次曲面等等的射影構成方法。

斯丹納在他自己的敘述中利用到彭斯來和吉尔剛所發現的对偶原理，並且他把定理並列地寫出來。

我們还要提到他的著名著作，研究在平面上給出一个定圓後，單用一根直尺來完成幾何作圖的問題。斯丹納的这个著作也像意大利的幾何学者馬斯克隆尼（Mascheroni）的著作"圓規幾何学"（1797）一样，仍然是幾何作圖領域中的經典著作❶。

差不多与斯丹納同時並且独立地，查理也以交叉比为基礎奠定了和發展了射影幾何学，它的著作叫做"關於高等幾何的論文"發表在 1852 年。在另一个著作裏，查理論証过所謂"判定理論"。

---

❶ 是最近確立的用一个圓規实現的幾何作圖法，丹麥數学家 Георгом мором 在它的著作"丹麥的歐幾里得幾何"（1672）早已寫过（參考 БСЭ 卷 10））

特别是他証明了同時切於五个已知圓錐截線的圓錐截線數等於3264。

在射影幾何歷史簡述中，不能不提到在幾何思想的發展上有傑出作用的俄國偉大学者罗巴契夫斯基(1793—1856)的著作。罗巴契夫斯基根据与歐幾里得平行公理相矛盾的公理，作出了与歐幾里得幾何同样是邏輯上無矛盾然而与它又有巨大區別的幾何学。这就打破了把歐幾里得幾何看作唯一可能的，与現实世界及經驗無關的，先驗論的幾何系統的这样幼稚的信仰。

唯心主义学者康德（Kant）的学說遭到了嚴重的打擊。罗巴契夫斯基在他的著作中貫徹了唯物主义的思想，这就是，抽象的幾何系統反映实際世界的性質，並且它的可应用性要由已有的經驗來驗証。

在罗巴契夫斯基發現非歐幾里得幾何以後，对於其他可能的幾何系統（抽象幾何"空間"）以及適合於它的現实世界的性質或現象的研究趨势得到了發展。

不久这个运動表現在各种幾何系統的形成中，这些幾何中，每一种都由它們固有的变換羣表徵出來（克萊因）。罗巴契夫斯基的偉大發現，所謂"幾何羣"(Клиффорда)，是所有这些思想的來源，它在科学的發展上有很傑出的作用。

我們回到綜合射影幾何發展的簡述上。現在來講这样一个時期，在这个時期裏，理論概括的進一步發展使幾何学家需要用新的抽象，並企圖在構成射影幾何的基本原則与原理時，能完全不用度量概念。

在这个新方法論的方向上有着重要作用的是德意志幾何学者斯陶特(1798—1867)以"位置幾何"和"位置幾何材料"为名的著作(1847和1856—1860)。

斯陶特不用含度量概念的交叉比等式來建立射影对应，而用

那由完全四角形的純幾何方法所建立的調和羣概念來作为出發點。这样，兩个射影點列的定义就得到了下面的形式：

如果兩个點列(線束)作成一一对应，其中一个的每組調和羣对应另一个的一組調和羣，則这兩个點列(線束)叫做射影點列(線束)。

主要的問題在於斯陶特的这个定义和透視鏈的射影定义是否一致。換句話說：这時任意四个对应元素的交叉比是否相等(§47)？对於这个問題斯陶特已給与了肯定的回答。他証明了(不十分嚴密)下面的定理，就是所謂射影幾何的基本命題：

如果兩个射影點列(線束)有三个对应的公共元素，則它們其餘的元素也都是对应的公共元素。

斯陶特的基本命題使幾何学者們从公理方面特別感到兴趣(特別是 К. А. 安德列夫(К. А. Андреев)，А. К. 佛拉索夫(А. К. Власов)等曾研究过这个問題)，而且發現要嚴密的証明它必須引用連續公理。

斯陶特曾提出过完全不用任何度量概念的幾何运算程式問題。他創造了特殊的"射影計算"，在那裏，起數的作用的是一次圖形的四个元素，它叫做"вурфам"。

在斯陶特以後有許多數学家研究过斯陶特方法，特別是把它推廣到高次圖形上。在現代莫斯科數学学派，特別是 А. К. 佛拉索夫和 Н. А. 格拉哥列夫教授在这方面得到了重要成果(参考 § 82)。

射影幾何的純幾何基礎的成就，引起了用射影方法也可能建立度量幾何的天才大胆的想法。这种思想的个別暗示在法國的幾何学者(彭斯來，查理)的著作中已可看到，他們利用無限远元素的討論來从射影形式中找出度量性質[1]。但是这个問題的完全解決

[1] 这一類的最簡單例子是線段的平分，当四个調和點中的一个是無限远點的時候。

在凱萊(Cayley, 1821—1895)和克萊茵(Klein, 1849—1925)的著作中可以看到，他們建立了所謂"射影的度量定义"。它的实質在於把圖形的度量性質看作是对於所謂"絕对形"的特殊幾何圖形的射影關係。譬如非固有直線上的虛圓點就是平面上的絕对形。这个新的概念是这样的普遍,除歐氏幾何外它还包括另外的(非歐幾里得)幾何系統。

克萊茵对幾何学的一般見解,敘述在他的有名著作"爱尔蘭根目錄❶"中。在这个著作中他闡明了这样意見,就是幾何学是關於組成羣的变換的研究。

克萊茵証明了每一个幾何系統都由它的羣的性質決定。譬如，射影幾何的羣是由射影空間到它自身的所有同素变換集合{K}構成的。仿射幾何的羣只是由空間裏非固有平面变为它自身的那些同素变換{A}所構成。最後度量幾何的羣(按克萊茵說法叫主羣)是由空間裏不改变絕对形的那些同素变換{M}所構成。这些羣的性質和它們的不变量的研究就是幾何的問題。

克萊茵观點的普遍性特别加强了它对於幾何学原則上的意义❷。

§ 82. 在射影幾何領域裏苏联学者的著作

在射影幾何的問題上研究得相当多的最早的俄國学者之一是莫斯科大学的 В. Я. 琴格魯(В. Я. Цингер, 1836—1907)教授。В. Я. 琴格魯在莫斯科大学講授射影幾何時，曾把醉心於幾何学的許多学生們团結在他的周圍。其中有後來著名的傑出幾何学

---

❶ 辛造夫(Сюнцов)教授的俄文譯稿标題为"新幾何研究的比較評論"刊載於喀桑大学綜合物理數学通報卷V。

❷ 但是不要以为克萊茵的体系是無所不包的,譬如,它不包含歐幾里得空間裏任意曲面上的幾何系統。

家：К. А. 安德列夫（К. А. Андреев），Б. К. 莫洛捷夫斯基（Б. К. Млодзиевский）及 А. К. 佛拉索夫（А. К. Власов）。

应当認为 В. Я. 琴格魯是莫斯科幾何学派的創始者。Н. Е. 茹科夫斯基在追悼 В. Я. 琴格魯所作的報告裏曾經說过："我們來追悼这位可以被公認为俄國幾何学派首領的數学家"。Б. К. 莫洛捷夫斯基教授也談到过这一點，在他对 В. Я. 琴格魯的回憶錄裏曾經指出："他認为正確的清楚的画圖与模型有重大的意义，是幾何教学必要的補助材料。他自己就是一个熟於技巧的繪圖員，他也要求学生們正確地清楚地描繪幾何圖形"。

在幾何基礎的問題上，В. Я. 琴格魯未能脫离唯心主义的观點，他認为人們創造的幾何公理是与他們的实际生活及周圍的物質世界是無關的。

在跟 В. Я. 琴格魯学習射影幾何的学生中，首先应該举出康·阿·安德列夫（К. А. Андреев，1848—1921）。他在莫斯科大学畢業後留校準备教学工作。他的教学活動是在哈尔科夫（Харьков）大学開始的。在那裏同時工作的还有卓越的數学家 А. М. 廖普諾夫（А. М. Ляпунов）与 В. А. 斯捷科洛夫（В. А. Стеклов）。

在 1875 年，К. А. 安德列夫答辯了碩士論文，論文的題目是"平面曲線的幾何結構"。後來在 1879 年又寫了博士論文，論文題目是"幾何对应在曲線構成問題上的应用"。在这些著作裏，К. А. 安得列夫研究了一类圖形的許多射影对应，並利用它們構成高次代數曲線。

在另外的著作裏，К. А. 安德列夫研究了圓多边形，並且確定了它們的許多有趣的性質。所謂圓多边形是通过一个點的圓弧所構成的圖形。每兩个圓除去上述公共點外还有一个交點，就是圓多边形的頂點。

К. А. 安德列夫的研究成果發表在論文"多边形一种普遍性質

的結論"裏(數学彙集,卷 VI, 1873)。

在"斯列捷尔(Штетер)七边形"的著作(哈尔科夫數学会通報,1889)中,K. A. 安德列夫对斯列捷尔定理給予新穎而巧妙的証明,作了如下的敘述:

"作圓錐截線的一个外切七角形,每隔兩个頂點順次連結直線,則其中每隔兩条直線的直線交點在另外某个圓錐截線上"。

K. A. 安德列夫曾致力於所謂"彭斯來多角形"的研究,这种多角形也就是外切於一个圓錐截線,同時內接於另一个圓錐截線的多角形。關於这些問題,K. A. 安德列夫曾寫过兩篇著作,發表在"哈尔科夫數学会通報"上(1884)。

此外 K. A. 安德列夫还創作了非常新穎的著作"關於構圖的問題"(哈尔科夫數学会通報 1891),其中作者研究了一种構圖的性質,这种構圖是由 2^{n-1} 个點与 2^{n-1} 平面組成,並且在每个平面上有 n 个點,通过每个點有 n 个平面。

由於 K. A. 安德列夫教授对射影幾何作了傑出的科学研究而被选为俄國科学院的通訊院士(1884)。同時他还作了很多的教学工作,開始是在哈尔科夫大学,後來在莫斯科大学。最後从 1898 年至 1917 年他担任教授講座。在这一活動的結果,安德列夫留下了許多大学教材,其中应該举出的有"解析幾何基礎教程"与"解析幾何習題集"。

在 1897 年基輔大学教授 M. E. 瓦新科-札哈洛琴科 (M. E. Ващенко-Захарченко 1825—1912) 的詳細教程間世,名为"射影幾何"。这个教程包含射影幾何的基本材料,其中有一次圖形以及二次圖形的射影对应,二次圖形以及三次圖形的同素变换与異素变换。二次曲面与二次面把的射影結構,以及平面上与空間裏配極变换的理論等等。

M. E. 瓦新科-札哈洛琴科的主要著作在使射影幾何的观念通

俗化这方面有重大意义。他說:“幾何学中的任何一部分,都未必有像射影幾何这样廣泛实际的应用。只提到作为幾何学这一部分的基礎的圖解靜力学就可以証明了”。

从 M. E. 瓦新科-札哈洛琴科的其他著作中,我們指出他的基本著作“數学史”卷 I(基輔 1883)(題目是幾何歷史概論)和他的“歐幾里得原本”的譯本(附有說明概論与註解)(基輔 1880)。

在射影幾何的領域中,深刻的創造性的著作是 B. Я. 琴格魯的学生莫斯科大学教授——A. K. 佛拉索夫 (A. K. Власов, 1868—1922)的著作。A. K. 佛拉索夫的碩士論文是“線性圓錐截線系”,寫於 1901 年,發表於“莫斯科大学論文錄”(物理—數学部分:卷 18, 1—208 頁)。在这个内容丰富的著作裏,著者不僅發展了線性圓錐截線系的射影性質,而且也是第一次对它的度量性質作了研究,關於非固有直線与虛圓點,也就是關於平面上絕对形的結構作了研究。在他的博士論文“在一次圖形裏的高次配極系”(莫斯科大学論文錄卷 25, 1—186 頁)裏,A. K. 佛拉索夫作出与代數方程式以及代數圖形理論对应的幾何理論的構成。对於用一次圖形構成高次形像的問題,A. K. 佛拉索夫的解答是这些形像以配極系定义並以二次形像的配極理論为根据。同時为了建立五次与六次配極系的理論,他認为应發展在三維与四維空間中反配極的綜合理論。

A. K. 佛拉索夫对於公理,特别是对於巴斯加定理的公理意义有深刻的研究。他研究了在多維空間中的類似構圖。A. K. 佛拉索夫企圖作超越函數 $\lg x$ 与 $\sin x$ 的射影定义。最後在研究画法幾何的射影基礎問題時,A. K. 佛拉索夫对著名的鮑里科-斯瓦玆(Польке-Шварц)定理給予新穎巧妙的証明。

喚起自己的学生嚮往於探求科学的道路,卓越講師 A. K. 佛拉索夫大大地增長了他的許多学生对射影幾何与画法幾何的兴趣。

A. K. 佛拉索夫的学生，莫斯科大学教授 H. A. 格拉哥列夫，(Н. А. Глаголев, 1888—1945) 成功的繼續發展了他老師的幾何学派。在射影幾何的領域中他的卓越工作是一般射影計算問題的解法，这个問題早在斯丹納与斯陶特的著作裏打下了基礎。H. A. 格拉哥列夫的这个研究，發表在他的大学教程“射影幾何”中(莫斯科 1936) 的“射影空間的算術”一章裏 (§§ 2,3,239—255 頁)。

著作中可找到可換代數域的所有形式，这个域的元素是空間的點或點羣，而算術运算是利用空間的同素变換实現的。1938 年 H. A. 格拉哥列夫的著作發表了，这个著作所研究的是 n 維空間裏一般的射影計算問題(純正數学与应用數学雜誌，卷 IX, 1938)。

H. A. 格拉哥列夫是圖表計算学方面的卓越学者之一，他把射影方法也应用到这个領域裏。在他的“圖表計算学理論基礎”(2版，1936) 一書中，他曾把配極变換应用到把虛直線系变虛點系的配極变換上 (第 IV 章)。也把射影方法应用到計算圖表作圖的化簡上。

还应当提出的是 H. A. 格拉哥列夫的著名教本画法幾何 (“画法幾何” 1 版 1936, 2 版 1938)，在很大程度上是依靠幾何变換，依靠射影与仿射变換。

H. A. 格拉哥列夫領導过莫斯科大学裏的綜合幾何講座。在那个講座裏，他和他的学生以及听講者作了很多關於射影幾何各种問題的報告。

最近在苏联有許多学者从事射影幾何的研究。其中可以举出 A. H. 科洛莫格洛夫院士，Л. К. 拉謝夫斯基教授，H. B. 葉非莫夫教授，A. A. 格拉哥列夫教授等等。

A. H. 科洛莫格洛夫的著作是論述射影幾何基礎❶。其中用

❶ A. H. 科洛莫格洛夫:“射影幾何基礎”[“Ann. of math.”33(1932)]。

拓撲观點研究了实射影空間与複射影空間的公理。

П. К. 拉謝夫斯基的兩篇著作，發表在 1940 年“數学彙集”裏❶，論述平面射影幾何公理的研究。在上述著作中的第一篇(“關於平面射影幾何的唯一性”)裏作者得到这样的結論：在平面射影幾何(用關联，順序，及連續公理)裏，笛沙格構圖和巴普斯構圖的作用不是偶然的。原來要作成某个另外的“構圖公理”的任何企圖，会自然地引導到包含笛沙格或巴普斯公理的幾何。在另一个著作(論關於新構圖公理的射影幾何)裏，П. К. 拉謝夫斯基研究了那由關联公理与不同於笛沙格公理和巴普斯公理的一个構圖公理所構成的一种平面射影幾何。

А. А. 格拉哥列夫的著作論述了高次对合的理論❷，研究了三次曲線❸，四次曲線以及与布魯明斯特 (Бурместр) 的幾何研究❹有關的問題等。

Н. В. 葉非莫夫發表的“高等幾何”的一般教程 (ГТТИ, М.-Л., 1945 年版)中，对射影幾何作了解析法的和綜合法的敍述。而且也作了公理法的敍述。

А. А. 斯科魯尼科夫的著作对射影平面的理論作了系統而且新穎的敍述❺。

佔有特殊地位的是所謂“射影微分幾何”，其中研究幾何圖形關於射影变換不变的微分性質。苏联学者的研究特别是莫斯科大学教授 С. П. 芬尼柯夫的研究(“射影微分幾何”1937 年版)在世界这方面的文献裏佔有主要地位。

---

❶ П. К. 拉謝夫斯基：“關於平面射影幾何的唯一性”“關於新構圖公理的射影幾何”(數学彙集卷 8 (50)：1, 2；1940)。

❷ 科学院物理數学博士学位論文(1946)，还有論文“三次对合的純幾何定义”(全苏數学者報告 II, 卷 I, 1936)。

❸ “Вурфов 平面在第一种四次空間曲線定义上的应用”(數学彙集 32, 1925)，“三次曲線的新定义”(ДАН, 53, 1946)。

❹ “關於布魯明斯特點的作圖”(ДАН, 58, 1947)。

❺ 斯科魯尼柯夫 Л. А.，射影平面的理論(“數学科学成就”卷 VI, 6 册, 1951)。